



**T.C**  
**GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**AYRIK ZAMANLI DUYARLI DİYABET KOMPLİKASYON MODELİNİN**  
**DETERMİNİSTİK ve RASTGELE ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Şeyma ŞİŞMAN**

**EKİM 2020**  
**GÜMÜŞHANE**

**T.C**  
**GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI**

**AYRIK ZAMANLI DUYARLI DİYABET KOMPLİKASYON MODELİNİN**  
**DETERMİNİSTİK ve RASTGELE ANALİZİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Şeyma ŞİŞMAN**

**Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**  
**"Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı"**  
**Yüksek Lisans Programında Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 14.09.2020**

**Tezin Sözlü Savunma Tarihi: 26.10.2020**

**EKİM 2020**

## TEZ BEYANNAMESİ

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlamış olduğum "**Ayrık Zamanlı Duyarlı Diyabet Komplikasyon Modelinin Deterministik ve Rastgele Analizi**" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Mehmet MERDAN sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 14/09/2020

Şeyma ŞİŞMAN

**ÖZET**  
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**AYRIK ZAMANLI DUYARLI DİYABET KOMPLİKASYON MODELİNİN**  
**DETERMİNİSTİK ve RASTGELE ANALİZİ**

Şeyma ŞİŞMAN

Gümüşhane Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

2020, 144 sayfa

Bu çalışmada, diyabet hastalığının matematiksel modeli (DC) ele alınmaktadır. Bu modelde (D) insanları komplike olmayan, (C) ise karmaşık diyabetliler olmak üzere ikiye ayırmaktadır. Bunun yanı sıra diyabet, genetik ve çevresel faktörlerin neden olduğu bilinen bir hastalıktır ve bu faktör doğumdaki genetik bozukluğun ana nedenlerden bir tanesidir. Bu her iki faktör göz önünde bulundurarak, diyabet komplikasyonu (DC) modelinden duyarlı diyabet komplikasyonu olan (SDC) modeli geliştirilmektedir. Bu modelde, doğrusal olmayan bir diferansiyel denklem sistemi duyarlı diyabet komplikasyonu (SDC) modeli ayrik zamanlı bir denklem sistemine dönüştürülmektedir. Model çözümlerinin pozitifliği ve sınırlılığı incelenmiştir.  $R_0$  temel artış sayısı hesaplanmaktadır. Eğer  $R_0 < 1$  ise doğumda

genetik bozukluğun olmadığı durum için global asimptotik olarak kararlı bir dengeye sahiptir ve  $R_0 > 1$  için ise sistem kararsız bir dengeye sahip olur. Buna ilaveten ayrık modelin rastgele davranışları için Düzgün, Binom, Geometrik, Hipergeometrik ve Poisson gibi kesikli zamanlı olasılık dağılımları kullanılarak incelendi. Ayrıca stokastik etki sonucunda elde edilen modelin sonuçları yorumlanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Denge noktaları, Duyarlı diyabet komplikasyon modeli, Global kararlılık, Kesikli zamanlı olasılık dağılımları

## **ABSTRACT**

## **MS THESIS**

# **DETERMINISTIC and RANDOM ANALYSIS OF THE DISCRETE SUSCEPTIBLE DIABETES COMPLICATION MODEL**

Şeyma ŞİŞMAN

Gümüşhane University

The Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematical Engineering

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

2020,144 pages

In this study, the mathematical model (DC) of diabetes is discussed. In this model, (D) divides people into uncomplicated diabetes and (C) complex diabetes. In addition, diabetes is a known disease caused by genetic and environmental factors, and this factor is one of the main causes of genetic disorders at birth. Considering these two factors, a susceptible diabetes complication (SDC) model is developed from the diabetes complication (DC) model. In this model, a nonlinear differential equation system is transformed into a responsive diabetes complication (SDC) model into a discrete time equation system. The

positivity and limitation of the model solutions are examined. The basic reproduction number of  $R_0$  is calculated. If  $R_0 < 1$ , it has a globally asymptotically stable equilibrium for the condition that there is no genetic disorder at birth, and for  $R_0 > 1$ , the system has an unstable equilibrium. In addition, discrete time probability distributions such as Uniform, Binomial, Geometric, Hypergeometric and Poisson were used for random behaviors of the discrete model. In addition, the results of the model obtained as a result of stochastic effect are compared and interpreted.

**Keywords:** Equilibrium points, Susceptible Diabetes Complication (*SDC*) model, Global stability, discrete time probability distributions.

## TEŞEKKÜR

Tez konusunun belirlenmesinde bana yardımcı olan bu çalışmanın tamamlanıp bu hale getirilmesinde kadar yardımını ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Prof.Dr. Mehmet MERDAN’a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu süreç içerisinde, desteğini esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme teşekkür ederim.

Şeyma ŞİŞMAN

Gümüşhane,2020



## İÇİNDEKİLER

	<b><u>Sayfa No</u></b>
ÖZET.....	IV
ABSTRACT.....	VI
TEŞEKKÜR.....	VIII
İÇİNDEKİLER .....	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XII
TABLolar DİZİNİ .....	XIV
SEMBOLLER ve KISALTMALAR.....	XXI
1. GENEL BİLGİLER .....	1
1.1. Giriş.....	1
1.1.1. Duyarlı Diyabet Komplikasyon (SDC) Modeli .....	5
1.2. Kararlılık ile İlgili Tanım ve Teoremler.....	7
1.2.1. Yüksek Boyutlu Sistemlerde Denge Noktası ve Kararlılık Analizi.....	12
1.3. Temel Çoğalma (Üreme) Sayısı.....	14
1.4. Olasılık Kuramı ile İlgili Temel Kavramlar.....	15
1.4.1. Bazı Kesikli Dağılımlar.....	19
1.4.1.1. Kesikli Düzgün Dağılım .....	19
1.4.1.2. Bernouilli Dağılımı .....	20
1.4.1.3. Binom Dağılımı (İki Terimli Dağılım) .....	21
1.4.1.4. Negatif Binom Dağılımı (Pascal Dağılımı).....	22
1.4.1.5. Geometrik Dağılım.....	24
1.4.1.6. Hipergeometrik Dağılım .....	27
1.4.1.7. Poisson Dağılımı .....	29
1.5. Rastgele Fark Denklemleri.....	31
1.6. Stokastik Fark Denklemleri .....	32
1.6.1. Stokastik Fark Denklemlerin Bazı Sayısal Çözüm Yöntemleri.....	32

2.	YAPILAN ÇALIŞMALAR .....	36
2.1.	Duyarlı Diyabet Komplikasyon (SDC) Modeli .....	36
2.2.	Duyarlı Diyabet Komplikasyon (SDC) Modelinin Deterministik Analizi .....	38
2.2.1.	Duyarlı Diyabet Komplikasyon (SDC) Modelinin Çözümlerinin Pozitifliği ve Sınırlılığı.....	39
2.2.2.	Duyarlı Diyabet Komplikasyon (SDC) Modelinin Denge Noktaları.....	40
2.2.3.	Duyarlı Diyabet Komplikasyon (SDC) Modelinin Temel Üreme Sayısı ( $R_0$ ) .....	41
2.2.4.	Duyarlı Diyabet Komplikasyon (SDC) Modelinin Global Kararlılığı.....	42
2.3.	Duyarlı Diyabet Komplikasyonunun (SDC) Rastgele Etkiler Altında Modellenmesi.....	43
2.3.1.	Kesikli Düzgün Dağılıma Sahip Rastgele Etkiler .....	44
2.3.2.	Binom Dağılımına Sahip Rastgele Etkiler .....	46
2.3.3.	Geometrik Dağılımına Sahip Rastgele Etkiler .....	48
2.3.4.	Hipergeometrik Dağılımına Sahip Rastgele Etkiler.....	50
2.3.5.	Poisson Dağılımına Sahip Rastgele Etkiler.....	52
2.3.6.	Sürekli Düzgün Dağılıma Sahip Rastgele Etkiler .....	54
2.4.	Duyarlı Diyabet Komplikasyonunun (SDC) Stokastik Etkiler Altında Modellenmesi.....	56
2.5.	Model Sonuçları .....	57
2.5.1.	Kesikli Düzgün (Tekdüze) Parametreler ile Sayısal Karakteristikleri .....	58
2.5.2.	Binom Parametreler ile Sayısal Karakteristikleri.....	67
2.5.3.	Geometrik Parametreler ile Sayısal Karakteristikleri .....	76
2.5.4.	Hipergeometrik Parametreler ile Sayısal Karakteristikleri .....	85
2.5.5.	Poisson Dağılımı Parametreler ile Sayısal Karakteristikleri.....	94
2.5.6.	Sürekli Zamanlı Düzgün Dağılımı Parametreler ile Sayısal Karakteristikleri .....	103

2.6.	Kesikli Düzgün ve Sürekli Düzgün Dağılımlarının Karşılaştırılması .....	112
2.6.1.	Dağılımların Beklenen Değerlerinin Analizleri .....	112
2.6.2.	Dağılımların Varyans Analizleri .....	113
2.6.3.	Dağılımların Standart Sapma Analizleri .....	114
2.6.4.	Dağılımların Varyasyon Katsayı Analizleri.....	115
2.6.5.	Dağılımların Ekstremum Noktalarındaki Güven Aralıklarının Analizleri	116
2.6.6.	SDC Modelinin Farklı Kesikli Dağılımlarından Elde Edilen Olasılık Karakteristiklerinin Karşılaştırılması .....	118
2.6.7.	Stokastik Etkiler Altında Duyarlı Diyabet Komplikasyon Modelinin Sonuçları. ....	123
3.	BULGULAR .....	135
4.	İRDELEME .....	136
5.	SONUÇLAR .....	137
6.	ÖNERİLER .....	138
7.	KAYNAKLAR .....	139
	ÖZGEÇMİŞ .....	144

## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa No

Şekil 2.1.	Duyarlı diyabet komplikasyon ( $SDC$ ) modeline ait kinematik şema ....	36
Şekil 2.2.	$S(n)$ duyarlı birey sayısının rastgele davranışları.....	58
Şekil 2.3.	$D(n)$ Komplike olmayan rastgele davranışları.....	61
Şekil 2.4.	$C(n)$ komplikasyon oranının rastgele davranışları .....	64
Şekil 2.5.	Binom dağılımına sahip $S(n)$ duyarlı birey sayısının rastgele davranışları .....	67
Şekil 2.6.	Binom dağılımına sahip $D(n)$ komplike olmayan rastgele davranışları	70
Şekil 2.7.	Binom dağılımına sahip $C(n)$ komplikasyon oranının rastgele davranışları .....	73
Şekil 2.8.	Geometrik dağılımına sahip $S(n)$ duyarlı birey sayısının rastgele davranışları .....	76
Şekil 2.9.	Geometrik dağılımına sahip $D(n)$ komplike olmayan rastgele davranışları .....	79
Şekil 2.10.	Geometrik dağılımına sahip $C(n)$ komplikasyon oranının rastgele davranışları .....	82
Şekil 2.11.	Hipergeometrik dağılımına sahip $S(n)$ duyarlı birey sayısının rastgele davranışları .....	85
Şekil 2.12.	Hipergeometrik dağılımına sahip $D(n)$ komplike olmayan rastgele davranışları .....	88
Şekil 2.13.	Hipergeometrik dağılımına sahip $C(n)$ komplikasyon oranının rastgele davranışları .....	91
Şekil 2.14.	Poisson dağılımına sahip $S(n)$ duyarlı birey sayısının rastgele davranışları .....	94
Şekil 2.15.	Poisson dağılımına sahip $D(n)$ komplike olmayan rastgele davranışları .....	97
Şekil 2.16.	Poisson dağılımına sahip $C(n)$ komplikasyon oranının rastgele davranışları .....	100
Şekil 2.17.	Sürekli Düzgün dağılımına sahip $S(n)$ duyarlı birey sayısının .....	103
Şekil 2.18.	Sürekli Düzgün dağılımına sahip $D(n)$ komplike olmayan rastgele davranışları .....	106

Şekil 2.19. Sürekli Düzgün dağılımına sahip $C(n)$ komplikasyon oranının rastgele davranışları .....	109
Şekil 2.20. (2.31) modelinin Stokastik Euler-Maruyama yöntemi ile çözümleri ..	124
Şekil 2.21. (2.31) modelinin Stokastik Milstein yöntemi ile çözümleri .....	126
Şekil 2.22. (2.31) modelinin Runge-Kutta 2 yöntemi ile çözümleri.....	128
Şekil 2.23. (2.31) modelinin Runge-Kutta 3 yöntemi ile çözümleri.....	130
Şekil 2.24. (2.31) modelinin Runge-Kutta 4 yöntemi ile çözümleri.....	132
Şekil 2.25. (2.31) modelinin Runge-Kutta 5 yöntemi ile çözümleri.....	134

## TABLÖLAR DİZİNİ

### Sayfa No

Tablo 2.1. Duyarlı diyabet komplikasyon ( <i>SDC</i> ) modelinin parametre değerleri...	38
Tablo 2.2. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının beklenen değeri ekstremum değerler ve zamanları .....	58
Tablo 2.3. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	59
Tablo 2.4. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	59
Tablo 2.5. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının varyasyon katsayısının ekstremum değerler ve zamanları .....	60
Tablo 2.6. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	60
Tablo 2.7. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	61
Tablo 2.8. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	62
Tablo 2.9. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	62
Tablo 2.10. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	63
Tablo 2.11. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	63
Tablo 2.12. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	64
Tablo 2.13. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	65
Tablo 2.14. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	65
Tablo 2.15. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	66
Tablo 2.16. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	66

Tablo 2.17. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	67
Tablo 2.18. Rastgele $S(n)$ modelinde varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	68
Tablo 2.19. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	68
Tablo 2.20. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	69
Tablo 2.21. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	69
Tablo 2.22. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	70
Tablo 2.23. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	71
Tablo 2.24. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	71
Tablo 2.25. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	72
Tablo 2.26. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	72
Tablo 2.27. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	73
Tablo 2.28. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	74
Tablo 2.29. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	74
Tablo 2.30. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	75
Tablo 2.31. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	75
Tablo 2.32. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	76

Tablo 2.33. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	77
Tablo 2.34. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	77
Tablo 2.35. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	78
Tablo 2.36. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	78
Tablo 2.37. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	79
Tablo 2. 38. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan varyansının uç değerleri ve zamanları .....	80
Tablo 2.39. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	80
Tablo 2.40. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	81
Tablo 2.41. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	81
Tablo 2.42. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	82
Tablo 2.43. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	83
Tablo 2.44. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	83
Tablo 2.45. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	84
Tablo 2.46. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının güven aralığındaki ekstremum, değerleri ve zamanları .....	84
Tablo 2.47. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	85
Tablo 2.48. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	86



Tablo 2.49. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	86
Tablo 2.50. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	87
Tablo 2.51. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının güven aralığındaki ekstremum değerler ve zamanları .....	87
Tablo 2.52. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	88
Tablo 2.53. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	89
Tablo 2.54. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	89
Tablo 2.55. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	90
Tablo 2.56. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	90
Tablo 2.57. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	91
Tablo 2.58. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	92
Tablo 2.59. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	92
Tablo 2.60. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	93
Tablo 2.61. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	93
Tablo 2.62. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	94
Tablo 2.63. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	95
Tablo 2.64. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	95

Tablo 2.65. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	96
Tablo 2.66. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	96
Tablo 2.67. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	97
Tablo 2.68. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	98
Tablo 2.69. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	98
Tablo 2.70. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	99
Tablo 2.71. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	99
Tablo 2.72. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	100
Tablo 2.73. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	101
Tablo 2.74. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	101
Tablo 2.75. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	102
Tablo 2.76. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	102
Tablo 2.77. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	103
Tablo 2.78. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	104
Tablo 2.79. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	104
Tablo 2.80. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	105

Tablo 2.81. Rastgele $S(n)$ duyarlı birey sayısının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	105
Tablo 2.82. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	106
Tablo 2.83. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	107
Tablo 2.84. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	107
Tablo 2.85. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	108
Tablo 2.86. Rastgele $D(n)$ komplike olmayan güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	108
Tablo 2.87. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları .....	109
Tablo 2.88. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları .....	110
Tablo 2.89. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları .....	110
Tablo 2.90. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları .....	111
Tablo 2.91. Rastgele $C(n)$ komplikasyon oranının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları .....	111
Tablo 2.92. Rastgele modelin $S(n)$ değişkenine ait beklenen değerleri .....	112
Tablo 2.93. Rastgele modelin $D(n)$ değişkenine ait beklenen değerleri .....	112
Tablo 2.94. Rastgele modelin $C(n)$ değişkenine ait beklenen değerleri .....	112
Tablo 2.95. Rastgele modelin $S(n)$ değişkenine ait varyans değerleri .....	113
Tablo 2.96. Rastgele modelin $D(n)$ değişkenine ait varyans değerleri .....	113
Tablo 2.97. Rastgele modelin $C(n)$ değişkenine ait varyans değerleri .....	113
Tablo 2.98. Rastgele modelin $S(n)$ değişkenine ait standart sapmanın değerleri ..	114
Tablo 2.99. Rastgele modelin $D(n)$ değişkenine ait standart sapmanın değerleri ..	114
Tablo 2.100. Rastgele modelin $C(n)$ değişkenine ait standart sapmanın değerleri ..	115
Tablo 2.101. Rastgele modelin $S(n)$ değişkenine ait varyasyon katsayı değerleri ...	115
Tablo 2.102. Rastgele modelin $D(n)$ değişkenine ait varyasyon katsayı değerleri ..	116

Tablo 2.103.Rastgele modelin $C(n)$ değişkenine ait varyasyon katsayı değerleri ..	116
Tablo 2.104.Rastgele modelin $S(n)$ değişkenine ait güven aralığındaki ekstremum değerleri.....	117
Tablo 2.105.Rastgele modelin $D(n)$ değişkenine ait güven aralığındaki ekstremum değerleri.....	117
Tablo 2.106.Rastgele modelin $C(n)$ değişkenine ait güven aralığındaki ekstremum değerleri.....	117
Tablo 2.107.Rastgele modelin $S(n), D(n), C(n)$ değişkenlerine ait beklenen değerleri .....	118
Tablo 2.108.Rastgele modelin $S(n), D(n), C(n)$ değişkenlerine ait varyans değerleri .....	119
Tablo 2.109.Rastgele modelin $S(n), D(n), C(n)$ değişkenlerine ait standart sapma değerleri.....	120
Tablo 2.110.Rastgele modelin $S(n), D(n), C(n)$ değişkenlerine ait varyasyon katsayı değerleri.....	121
Tablo 2.111.Rastgele modelin $S(n), D(n), C(n)$ değişkenlerine ait güven aralık değerleri.....	122
Tablo 2.112.Stokastik Euler-Maruyama modelinin değişkenlerine ait bazı sayısal veriler .....	125
Tablo 2.113.Stokastik Euler-Milstein modelinin değişkenlerine ait bazı sayısal veriler .....	127
Tablo 2.114.Stokastik Runge-Kutta 2 modelinin değişkenlerine ait bazı sayısal veriler .....	129
Tablo 2.115.Stokastik Runge-Kutta 3 modelinin değişkenlerine ait bazı sayısal veriler .....	131
Tablo 2.116.Stokastik Runge-Kutta 4 modelinin değişkenlerine ait bazı sayısal veriler .....	133
Tablo 2.117.Stokastik Runge-Kutta 5 modelinin değişkenlerine ait bazı sayısal veriler .....	135

## SEMBOLLER ve KISALTMALAR

$S(n)$	:Duyarlı birey sayısı
$D(n)$	:Komplikasyon olmayan diyabetikler
$C(n)$	:Komplikasyon olan diyabetikler
$E[X]$	:X rastgele değişkeninin beklenen değeri
$E[X^n]$	:X rastgele değişkeninin n. momenti
$Var[X]$	:X rastgele değişkeninin varyansı
$std[X]$	:X rastgele değişkeninin standart sapması
$VK[X]$	:X rastgele değişkeninin varyasyon katsayısı
$GA[X]$	:X rastgele değişkeninin güven aralıkları
$M_x(t)$	:X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu
$J$	:H matrisinin Jakobien matrisi
$R_0$	:Temel üreme sayısı

## 1.GENEL BİLGİLER

### 1.1.Giriş

Rastgele dinamik sistemler, matematiksel olarak bir denklemi ifade edebilirken, doğada gözlemlenen olaylar da dinamik süreci temsil etmektedir. Bu sistemler, zamana bağlı olarak değişen sistemlerdir. Diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırma yöntemlerinde fark denklemleri ortaya çıkmaktadır. Sistematik olarak gelişen matematik ile beraber ortaya çıkan fark denklemleri ilk teori olarak bilinmektedir. Zamana bağlı ayırık olayların matematiksel ifadesinde bu teori kullanılmaktadır. Fark denklemleri, ekonomi, biyoloji, sinyal işleme, bilgisayar mühendisliği, genetik, tıp, ekoloji, sabit nokta teorisi gibi birçok matematik ve bilimin diğer alanlarında da birçok uygulaması bulunmaktadır. Böylece fark denklemler teorisinin uygulamaları, ekonomide ulusal gelir davranışını ve örümcek ağı modelinin incelenmesinde, biyolojide canlı popülasyon sayısının araştırılmasında, kontrol teorisinde kararlılık durumunun tespitinde, tıpta hücre hareketlerinin incelenmesinde kullanılmaktadır.

M.Ö. 2000 yıllarında bir denklemin kökünü bulma çalışması ilk olarak Babillerde görülmektedir. M.S. 0-400 yıllarında Heron, Theon ve Diophantus fark denklemlerine büyük katkıda bulunmuştur. 400-1200 yılları arasında Hintli matematikçi Brahmagupta ikinci dereceden bir denklemi çözmek için birçok kurallar geliştirmiş ve bu kurallara ardışık tekrar yöntemini kullanmıştır. Ayrıca bu dönemde Al-Karaji, Ömer Hayyam, Bhaskara ve Al-Samawal'ın çalışmaları görülmektedir. 1202 yılında Fibonacci biyoloji alanında tavşan problemi olarak bilenen matematik modelini ortaya koymuştur. Bu problemde, tavşanlar doğurduklarında ilk iki ay yavru yapamazlar ve üçüncü aydan sonra her çift her ay bir çift yavru yapmaktadır. Buradan çiftlikte bir çift tavşanla başlanılırsa kaç ay sonra kaç çift tavşan elde edilir? Sorusunun cevabına ulaşılacak istenmektedir. Bu sorunun matematik modeli ise bize ikinci mertebeden bir fark denklemini vermektedir. Fibonacci bu çalışmasında

$$F(n + 2) = F(n + 1) + F(n)$$

fark denklemini oluşturmuştur (Elaydi,2005). Bu denklemi Alfred Binet tarafından çözülmüş olup buna Binet formülü denilmiştir (Weisstein,1999).

1600-1700 yıllarında en önemli çalışmayı Newton, günümüzde kök bulma formülünü olarak bilinen ‘ Newton metodu ’

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

şeklinde ifade edilmektedir (Kulenovic vd.,2000).

1700-1750 yılları arasında Ricatti özellikle diferansiyel denklemler üzerinde çalışmıştır ve günümüzde

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n}{c + dx_n}$$

elde edilen fark denklemi onun adı ile Ricatti fark denklemi olarak geliştirilmiştir.

1826-1850 yıllarında popülasyon modeli ile ilgili matematiksel model oluşturulmaktadır. Burada popülasyon büyüklüğünün kendisinden önceki neslin popülasyon büyüklüğü ile orantılı olması ile ortaya çıkmaktadır. Bu durumda matematiksel model

$$x(n + 1) = rx(n)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $n$ ; periyod zamanı  $x(n)$ ;  $n$  zamanındaki popülasyon büyüklüğünü,  $x(n + 1)$ ; bir sonraki zaman dilimindeki popülasyon büyüklüğü ve  $r$  büyüme oranını vermektedir (Kulenovic vd., 2000).

Bundan sonra 1850 yıllarında herhangi bir canlı türü gelecekteki durumu ile tahmin yapabilirken; bu türün önceki durumunu ve bunun değişimine neden olan beslenme, üreme ve ölüm gibi faktörler göz önünde bulundurulduğunda fark denklemlerinden yararlanılmaya başlanmıştır.

1851-1875 yıllarında Heine, Casorati ve Riemann fark denklemlerine katkıda bulunmuştur. Casorati bu dönemde, diferansiyel denklemlerle fark denklemlerinin önemli ortak özelliklere sahip olduğunu farkına varmaktadır ve lineer denklemler için Casorati formülünü,  $n$ . mertebeden fark denklemi, homojen fark denklemi gibi önemli çalışmalar ortaya koymuştur. 1876-1900 yıllarında Hermite, Christoffel, Routh, Laguerre, Lucas, Gegenbauer, Poincare, Markov, Chebychev ve Peano fark denklemine katkıda bulunmuştur (Kulenovic vd., 2000).

1926-1950 yılları arasında Julia ve Fatou tarafından fark denklemleri ve ardışık yöntemleri kompleks fonksiyonlar üzerinde uygulanmış ve bu iki matematikçi temel yinelemeli süreç üzerinde çalışmalar yapmışlardır. 1928 yılında Adams, lineer adi fark denklemlerin regüler olmayan durumlarını araştırdı. Levinson (1946), lineer fark denklem sistemlerinin asimptotik davranışlarını inceledi.

1950 yılından sonra matematikçiler lineer sabit katsayılı fark denklemlerini ve kararlılığını incelemişlerdir. Evgrafov (1958), fark denklemlerinin asimptotik çözüm davranışını ele aldı. Coffman (1964), adi fark denklemlerinin asimptotik davranışlarını araştırdı. Hurt (1967), adi fark denklemlerinin bazı kararlılık teoremlerini ispatladı. Miller (1968), lineer fark denklemlerini inceledi. Williams (1970), dinamik sistemlerde kararlılığını araştırdı. Cadzow (1973), ayrık zaman sistemlerini ele aldı. Schinas (1974), tam normlu uzaylarda zaman fark denklemlerinin kararlılığını inceledi. Clark (1976), nüfus poulasyon dinamiğini ele aldı. Luenberger (1979), dinamik sistemlerin teorisini uygulamaları ile inceledi. Kailath (1980), lineer sistemleri inceledi. Miller ve Michael (1982), adi fark denklemlerini araştırdı. Ludyk (1985), zaman değişkenli ayrık zaman sistemlerinin kararlılığını inceledi. Goldberg (1986), fark denklemlerini ele aldı. Carlson (1989), sonlu fark denklemlerinin kararlılığını araştırdı. Eastham (1989), lineer denklem sistemlerinin asimptotik özelliklerini inceledi. Sharkovsky vd. (1993), fark denklemlerinin uygulamalarını araştırdı. Elaydi ve Zhang (1994), sonlu gecikmeli fark denklemlerinin kararlılığı ve periyodikliğini inceledi.

1995-2000 yılları arasında bu çalışmalardan bazıları Ladas tarafından yapılmaktadır. 1999-2019 yıllarında ise Amleh vd. (1999), Cushing (1999), Elaydi (1999), Komsala vd. (2000), Aboutaleb vd. (2001), Cushing ve Henson (2001), DeVault vd. (2001), Kulenoviç vd. (2001), Abu-Saris vd. (2002), Grove ve Ladas (2002), Yan vd. (2002-2003), Al-Saris ve DeVault (2003), El-Owaidy vd. (2003), Fan vd. (2004), El-Owaidy vd. (2004), He vd. (2004), Elaydi (2005), Sun ve Xi (2005), Peng (2006), Hu ve Li (2007), Amleh vd. (2008), Sun vd. (2008), Elaydi (2009), Crauela vd. (2009), Al-Dosary (2010), Jia ve Hu (2010), Wang vd. (2010), Alsmeyer vd. (2011), Alsmeyer vd. (2012), Din (2013), Cortés vd. (2014), Al-Ahmad vd. (2018).

Fark denklemleri, durumu zamanla değiştiğinden dolayı bir notasyona ihtiyaç duyulmaktadır.  $n$  zamanındaki sistemin durumu  $x(n)$  ile tanımlanır. Bu fonksiyonun iterasyonu



$$X(n + 1) = f(x(n)) \quad (1.1)$$

biçiminde verilmektedir. Fark denkleminde bir  $x_0$  noktasından başlayarak,

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))) \dots \quad (1.2)$$

dizisi olarak oluşturulur ve kolaylık için

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)), f^3(x_0) = f(f(f(x_0))) \dots$$

ve

$$x(n) = f^n(x_0) \quad (1.3)$$

şeklinde  $n$  zamanındaki  $x$  değeri hesaplanır ve genel olarak

$$x(n + 1) = f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x(n))$$

şeklinde yazılabilir.  $f(x_0), f$ 'nin  $x_0$  noktasındaki birinci iterasyonunu,  $f^2(x_0), f$ 'nin  $y_0$  noktasındaki ikinci iterasyonunu ve böyle devam ederek  $f^n(x_0), f$  nin  $x_0$  noktasındaki  $n$ . kez tekrarlandığını gösterir.  $f^0(x_0) = x_0$  olmak üzere  $\{f^n(x): n \geq 0\}$  tüm pozitif iterasyonlar kümesine  $x_0$ 'ın pozitif yörüngesi denir. Bu iterasyon yöntemi ayrık dinamik sisteminin bir örneğidir. Burada (1.1) 'de  $f$  fonksiyonunu  $f: \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olarak tanımlanan  $f$  fonksiyonu ile yer değiştirilirse,

$$x(n + 1) = f(n, x(n)) \quad (1.4)$$

elde edilir. (1.4) denkleminde otonom olmayan veya zaman değişkenli denir iken (1.1) denkleminde otonom veya zaman değişkensiz denir.

Son zamanlarda fark denklemlerinin pozitif çözümlerinin davranışları ve salınımlılığı ele alınmıştır Ladas 1990 yılındaki çalışmasında,

$$x_{n+1} - x_n + px_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

$p \in (0, \infty), k \in \mathbb{Z}^+$  lineer otonom fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı araştırmaktadır.

Yüksek mertebeli rasyonel fark denkleminin çözüm davranışını araştırmak ve denge noktalarının yerel asimptotik kararlılığını tartışmaktadır. Bu çalışmada,  $A, B, C$  pozitif reel

sayılar,  $k$  pozitif tamsayı ve başlangıç şartları  $x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_{-1}, x_0$  keyfi pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{A+Bx_n+Cx_{n-k}}{1+x_n+x_{n-k}}, \quad n = 0,1,2, \dots \quad (1.6)$$

rasyonel fark denkleminin pozitif denge noktasının yerel asimptotik kararlılığını, global(küresel) kararlılığını, periyodikliğini, yarı çevrim analizi ve sınırlılığı araştırılmıştır.

Çınar 2003 yılında;

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{-1+x_n x_{n-1}}, \quad n = 0,1,2, \dots \quad (1.7)$$

fark denkleminin çözümlerini başlangıç şartlarına göre durumları ve bu çözümlerin lokal asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Amleh vd.(1999), çalışmalarında başlangıç şartları  $x_{-1}, x_0$  keyfi pozitif reel sayılar ve  $\alpha$  pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad n = 0,1 \dots \quad (1.8)$$

fark denklemlerinin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını ve pozitif çözümlerinin periyodikliğini ve sınırlılığını araştırılmaktadır.

### 1.1.1. Duyarlı Diyabet Komplikasyon (SDC) Modeli

Epidemoloji, canlı bir organizmaya yayılmış hastalıkların son birkaç yıldır giderek daha fazla ilgi görmektedir. Matematiksel modelleme, bir hastalığın epidemiyolojisini incelemek ve gerçek dünyadaki problemlerinden kaynaklanan önemli soruları analiz etmek için kullanılmaktadır. Gerçek problemler olarak bilinen biyo-bilim, kimya, mühendislik gibi alanlarda da kullanılmaktadır. Bu hastalık modellerini ayrık zamanlı denklem sistemleri ile de analizi elde edilmektedir. Bilimin gelişmesiyle birlikte, matematiksel modelleme sadece bulaşıcı hastalıkların yayılmasını değil, aynı zamanda bulaşıcı olmayan hastalıkları da incelemek içinde kullanılmaktadır. Halk arasında şeker hastalığı olarak bilinen diyabet, genellikle kalıtsal ve çevresel etkenlerin birleşimi ile oluşan ve kandaki glikoz seviyesinin aşırı derecede yükselmesiyle oluşan bir hastalıktır. Diyabet modeli biyolojik problemdir ve kronik bir hastalıktır. Şeker metabolizmasının düzenlenmesinde rol oynayan hormonların en önemlisi pankreasın beta hücresinden salgılanan insülin hormonudur. İnsülin, şekerin hücre içine girmesini ve hücrede glikojen olarak depolanmasını sağlamaktadır. Diyabet hastaları,

yedikleri besinlerden kana geçen glukozu kullanamazlar ve kan şekeri düzeyi yükselerek birçok doku ve organda hasara yol açmaktadır. İki tip şeker hastalığı çeşidi vardır: tip 1 şeker hastalığı, insülin olmadan vücut hücreleri glikozu ememez ve işleyemez, böylece kan şekeri seviyeleri artar, tip 2 şeker hastalığında ise, vücudun yeteri miktarda insülini üretememesinden ortaya çıkmaktadır. 1921 yılında insülinin kullanıma girmesiyle diyabetin tüm türleri tedavi edilmektedir fakat kesin bir tedavisi yoktur. Tip 1 diyabetinin en temel tedavilerinde insülin şırıngası veya kalemleri enjekte edilmesidir, tip 2 diyabetinde ise, diyet ve şeker düşürücü ilaçlar kullanılmaktadır. Diyabette kullanılan tedavi yöntemleri pek çok komplikasyonlara yol açmaktadır. Boutoyeb vd.(2004), komplikasyon olmayan diyabetikler (D) ve komplikasyon olan diyabetikleri (C) bulmak için (DC) diyabet komplikasyon modelini tanıtmaktadır ve bu çalışmada incelenecek olan sürekli zaman modeli aşağıda verilmektedir (Widyaningsih vd.,2018).

$$\begin{aligned}\frac{dD}{dt} &= I - (\lambda + \mu)D + \gamma C \\ \frac{dC}{dt} &= \lambda D - (\gamma + \delta + \nu + \mu)C\end{aligned}\tag{1.9}$$

Burada  $I, \lambda, \gamma, \delta, \nu, \mu > 0$  dır. Daha sonra (1.9) modelinden farklı olarak insidans sayısının sabit olmadığı ve olay sayısının genetik ve çevresel faktörlerini dikkate alarak belirlemektedir. Yaşam tarzını etkileyen faktörlerden biri sosyal etkileşimdir. Bu etkileşim sağlıklı duyarlı bir bireyin diyabetteki potansiyel arttırmak için yaşam tarzını etkileyen önemli bir faktördür (Boutayeb, vd., 2004). Hill vd.(2013) göre, sağlıklı yaşam tarzı olan hastalar ile sağlıklı bireylerin arasındaki etkileşime yol açmaktadır ve olası etkileşimlerin sayısını belirlemek için duyarlı bireylerin sayısı olan (S) adlı yeni birey grubu elde edilmektedir. (DC) modeli duyarlı bireyleri grubuna bağlı olarak, duyarlı diyabet komplikasyon modeline (SDC) modifiye edilmektedir (Hill vd., 2013).

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \alpha S + \alpha(1 - \rho)(D + C) - \frac{\beta SD}{N} - \mu S \\ \frac{dD}{dt} &= \frac{\beta SD}{N} + \alpha \rho(D + C) - (\lambda + \mu)D + \gamma C \\ \frac{dC}{dt} &= \lambda D - (\gamma + \delta + \mu)C\end{aligned}\tag{1.10}$$

Burada (1.10) modelini ileri fark yöntemiyle

$$\begin{aligned}
\frac{S(n+1)-S(n)}{h} &= \alpha S(n) + \alpha(1-\rho)(D(n) + C(n)) - \frac{\beta S(n)D(n)}{N} - \mu S(n) \\
\frac{D(n+1)-D(n)}{h} &= \frac{\beta S(n)D(n)}{N} + \alpha\rho(D(n) + C(n)) - (\lambda + \mu)D(n) + \gamma C(n) \\
\frac{C(n+1)-C(n)}{h} &= \lambda D(n) - (\gamma + \delta + \mu)C(n)
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}
S(n+1) &= S(n) + h \left( \alpha S(n) + \alpha(1-\rho)(D(n) + C(n)) - \frac{\beta S(n)D(n)}{N} - \mu S(n) \right) \\
D(n+1) &= D(n) + h \left( \frac{\beta S(n)D(n)}{N} + \alpha\rho(D(n) + C(n)) - (\lambda + \mu)D(n) + \gamma C(n) \right) \\
C(n+1) &= C(n) + h(\lambda D(n) - (\gamma + \delta + \mu)C(n))
\end{aligned} \tag{1.12}$$

ayrık zamanlı bir denklem sistemine dönüştürülmektedir. Burada  $S(0) > 0, D(0) > 0, C(0) > 0$  ve  $h = 0.01$ 'dir. Sırasıyla  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho > 0$  ve  $0 \leq \rho \leq 1$  parametreleri doğum oranı, etkileşim oranı, komplikasyonların iyileşme oranı, komplikasyona bağlı ölüm oranı, komplikasyonların ortaya çıkma oranı ve doğumda genetik bozukluk olma oranı (Widyaningsih vd.,2018) .

Son zamanlarda, birçok araştırmacı diyabet modellemesi hakkında araştırmalar sunmaktadır. Sergre et. ark., kan şekeri ve diyabet hakkında matematiksel bir model oluşturur. Hiperglisemi gibi diyabet kronik hastalığı nedeniyle insan vücudundaki çeşitli semptomların, aşırı diyabetin akut belirtisini aşırı idrar üretimi olarak temel aldığı, telafi edici susuzluk ve artan sıvı alımı, bulanık görme, kilo kaybı, uyuşukluk gibi sonuçlara varılmıştır. Rosado hormon aktivitelerini sınırlandırır ve kandaki glikoz seviyelerini etkiler, ayrıca 5 saat glikoz intoleransı testi ve Ackerman tarafından önerilen büyütme sonuçlarına dayanarak hastalarda, diyabeti tespit eden matematiksel bir model sunarlar (Ackerman vd.,1969). İnsüline bağımlı diyabet Mellitus (IDDM), pankreasın hareketsizliği ile ayırt edilir. Son zamanlarda bir IDDM hastasının gerçek verilere dayanarak, diyabetes mellitusta matematiksel modelleme için biyo-sistemde çeşitli önemli sistemler Stahl ve Johansson (2009) tarafından formüle edilmiştir.

## 1.2. Kararlılık ile İlgili Tanım ve Teoremler

**Tanım 1.1.**  $n \in \mathbb{N} = \{0,1, \dots\}$  bağımsız değişken ve  $x_n, \mathbb{N}$  üzerinde tanımlı reel bir fonksiyon olmak üzere

$$x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k} \tag{1.13}$$

ifadesine  $k$ . mertebeden fark denklemi denir (Agarwal 2000).

**Teorem 1.1.**  $I$  reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere,  $f: I \times I \rightarrow I$  sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her  $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \dots, x_0 \in I$  başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

denkleminin bir tek  $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$  çözümüne sahiptir (Grave ve Ladas, 2005).

**Tanım 1.2.**  $\bar{y}$  noktası için (1.13) denkleminde  $f(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$  şartını sağlayan  $\bar{x}$  noktasına (1.14) denkleminin denge noktası denir.  $n \geq 0$  için  $\bar{x} = x_n$  ise,  $\bar{x}$ 'ye  $f$ 'nin sabit noktası denir (Elaydi, 1996).

**Tanım 1.3.** Eğer her  $n > 0$  için  $x_{-1}, x_0 \in H$  iken  $x_n \in H$  olacak şekilde bir  $H \subseteq I$  alt aralığı varsa, bu aralığa (1.14) denkleminin sabit aralığı denir (Kulenovic ve Ladas, 2001)

**Tanım 1.4.**  $\bar{x}$ , (1.13) denkleminin denge noktası olmak üzere,

- i. Eğer  $x_{-1}, x_0 \in I$  olmak üzere  $\forall \varepsilon > 0$  için  $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$  iken her  $n \geq 0$  için  $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı varsa,  $\bar{x}$  denge noktası kararlıdır denir.
- ii. Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı ve  $x_{-1}, x_0 \in I$  iken  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$  olacak şekilde,  $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$  şartını sağlayan  $\gamma > 0$  sayısı varsa,  $\bar{x}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.
- iii. Eğer  $x_{-1}, x_0 \in I$  iken  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$  ise,  $\bar{x}$  denge noktasına global çekici denir.
- iv. Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı ve global çekici nokta ise,  $\bar{x}$  denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir.
- v. Eğer  $\bar{x}$  denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.
- vi. Eğer  $x_{-1}, x_0 \in I$  iken  $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \lambda$  ve bazı  $N \geq -1$  sayıları için  $|x_n - \bar{x}| \geq \lambda$  olacak şekilde  $\lambda > 0$  sayısı varsa,  $\bar{x}$  denge noktasına geri itici nokta (repeller) denir. (Elaydi, 1995; Rug, 1996; Agarwal, 2000; Yang, 2004).

**Tanım 1. 5.** Eğer  $\{x_n\}$  dizisi için  $x_{n+p} = x_n$  oluyorsa en küçük pozitif  $p$  tamsayısına bu dizinin periyodu denir (Elaydi, 1995; Rug, 1996; Agarwal, 2000; Yang, 2004; Douraki, 2006).

**Tanım 1.6.** Eğer  $\{x_n\}$  dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için  $x_{n+p} = x_n$  ise en küçük pozitif  $p$  tamsayısına  $\{x_n\}$  dizisine er geç denir (Elaydi, 1995; Rug, 1996; Agarwal, 2000; Yang vd, 2004; Douraki vd, 2006).

**Tanım 1.7.** (1.14) denkleminde  $f(x_n, x_{n-1})$  fonksiyonunun  $f(r, s)$  şeklinde düşünelim:

$$u = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial r} \quad v = u = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial s}$$

olmak üzere

$$x_{n+1} = ux_n + vx_{n-1} \quad (1.15)$$

fark denklemi elde edilir ve (1.14) denkleminin  $\bar{x}$  denge noktası civarında lineerleştirilmiş denklemi denir.

(1.15) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - u\lambda - v = 0 \quad (1.16)$$

dir (Kulenovic ve Ladas, 2001).

**Teorem 1.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)**

- i. Eğer (1.16) denkleminin her kökü mutlak değerce 1'den küçük ise,  $\bar{x}$  denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- ii. Eğer (1.16) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise,  $\bar{x}$  denge noktası kararsızdır.
- iii. (1.16) denkleminin her kökü mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart

$$|u| < 1 - v < 2$$

olmasıdır. Bu durumda,  $\bar{x}$  denge noktası lokal olarak asimptotik kararlıdır.

- iv. (1.16) denkleminin her kökü mutlak değerce 1'den büyük olması için gerek ve yeter şartlar

$$|v| > 1 \text{ ve } |u| < |1 - v|$$

olmasıdır. Bu durumda,  $\bar{x}$  denge noktası geri itici nokta (repeller) dir.

- v. (1.16) denkleminin, bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şartlar

$$u^2 + 4v > 0 \text{ ve } |u| > |1 - v|$$

olmasıdır. Bu durumda,  $\bar{x}$  denge noktası kararsızdır ve eyer noktası diye adlandırılır.

vi. (1.16) denkleminin kökü mutlak değerce bire eşit olması için gerek ve yeter şart

$$|u| = |1 - v| \text{ veya } v = -1 \text{ ve } |r| \leq 2$$

olmasıdır. Bu durumda  $\bar{x}$  denge noktası hiperbolik olmayan nokta olarak adlandırılır (Grave ve Ladas,2005).

**Tanım 1.8. (Pozitif Yarı Döngü).**  $\bar{x}$  ,(1.14) denkleminin denge noktası ve  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  de pozitif bir çözümü olsun.  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  çözümünün pozitif yarı döngüsü  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  terimlerinin ard arda gelmesinden oluşur. Bu dizinin bütün elemanları  $\bar{x}$  ‘dan büyük veya eşit,  $l \geq -1$  ve  $m \leq \infty$  öyle ki,

$$l = -1 \text{ veya } l > -1 \text{ ve } x_{l-1} < \bar{x}$$

ve

$$m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ ve } x_{m+1} < \bar{x}$$

dir (Kocic ve Ladas,1993).

**Tanım 1.9. (Negatif Yarı Döngü).**  $\bar{x}$  ,(1.14) denkleminin denge noktası ve  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  de pozitif bir çözümü olsun.  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  çözümünün pozitif yarı döngüsü  $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$  terimlerinin ard arda gelmesinden oluşur. . Bu dizinin bütün elemanları  $\bar{x}$  ‘dan küçük,  $l \geq -1$  ve  $m \leq \infty$  öyle ki,

$$l = -1 \text{ veya } l > -1 \text{ ve } x_{l-1} \geq \bar{x}$$

ve

$$m = \infty \text{ veya } m < \infty \text{ ve } x_{m+1} \geq \bar{x}$$

dir (Kocic ve Ladas,1993).

**Tanım 1.10 (Sıfır Civarında Salınımlık).** (1.14) denkleminin  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  dizisinin çözümlerinin hepsi  $\bar{x}$  denge noktasından ne pozitif ne de negatif ise bu çözümlere sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir (Kulenovic ve Ladas, 2001).

**Tanım 1.11 ( $\bar{x}$  Denge Noktası Sıfır Civarında Salınımlılık).**  $\bar{x}$ , (1.14) denkleminin denge noktası ve  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  de pozitif bir çözümü olmak üzere  $\{x_n - \bar{x}\}$  dizisi salınımlı

ise,  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  çözümüne  $\bar{x}$  denge noktası civarında salınımlı değildir (Kulenovic ve Ladas, 2001).

**Tanım 1.12 (Sınırlı Dizi).**  $\forall n \geq -1$  için  $S \leq x_n \leq T$  olacak şekilde  $S$  ve  $T$  pozitif sayıları varsa,  $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$  dizisine sınırlıdır denir (Kulenovic ve Ladas, 2001).

**Teorem 1.3 (Clark Teoremi).**  $k, l \in \mathbb{R}$  ve  $m \in \{1, 2, \dots\}$  olsun. O zaman

$$x_{n+1} - kx_n + lx_{n-m} = 0 \quad n = 0, 1, \dots$$

fark denkleminin asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart  $|k| + |l| < 1$  olmasıdır (Kulenovic ve Ladas, 2001).

**Tanım 1.13 (Hiperbolik Nokta).** Eğer  $\bar{x}$  noktası için (1.14) denkleminde

$$|f'(\bar{x}, \bar{x})| \neq 1$$

şartı sağlıyorsa  $\bar{x}$  denge noktasına (1.14) denkleminin hiperbolik noktası denir.

**Teorem 1.4.**  $\bar{x}$ , (1.1) denkleminin denge noktası olsun. (1.1)'de tanımlanan  $f$  fonksiyonu sürekli ve diferansiyellenebilir olmak üzere durumları doğrudur.

- i. Eğer  $|f'(\bar{x})| < 1$  ise,  $\bar{x}$  denge noktası asimptotik kararlıdır.
- ii. Eğer  $|f'(\bar{x})| > 1$  ise,  $\bar{x}$  denge noktası kararsızdır.

**Teorem 1.5.**

$$x_{n+1} = f(x_n, \dots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.17)$$

fark denklemini düşünelim.  $f \in C[(0, \infty)^{k+1}, (0, \infty)]$  fonksiyonu her bir bileşeni için artan olsun. Başlangıç şartları  $x_{-k}, \dots, x_0$  pozitif sayılar olmak üzere, (1.17) denklemini tek bir pozitif denge noktasına sahip olsun.

$$g(y) = f(x, \dots, x), x \in (0, \infty) \quad (1.18)$$

şeklinde tanımlanan ve

$$(g(x) - x)(x - \bar{x}) < 0, \quad x \neq \bar{x}$$

için negatif geri besleme (feedback) özelliği sağlayan  $g$  fonksiyonunu ele alalım. O halde  $\bar{x}$ , (1.17) denkleminin bütün pozitif çözümlerinin bir global çekicisidir. Yani



$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$$

dir.

### 1.2.1. Yüksek Boyutlu Sistemlerde Denge Noktası ve Kararlılık Analizi

Bu bölümde  $k$  boyutlu fark denklem sisteminin denge noktalarındaki kararlılığını incelenmektedir.  $n$  bağımsız değişkenine bağlı  $k$  boyutlu fark denklem sistemi

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= f_1(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)), \\ x_2(n+1) &= f_2(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) \\ &\vdots \\ x_k(n+1) &= f_k(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Şeklinde elde edilir. Buradan  $x_1, x_2, \dots, x_k$  birer değişken ve  $f_1, f_2, \dots, f_k$  fonksiyonları ise doğrusal olmayan fonksiyonlar olarak tanımlanmaktadır. (1.19) denklem sisteminin kararlılığını incelemek için ilk olarak sistemin sağ tarafındaki  $x_i(n+1) = 0, i = 1, 2, \dots, k$  sıfıra eşitlenir ve buradan denge noktası bulunur.

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= 0 \\ x_2(n+1) &= 0 \\ &\vdots \\ x_k(n+1) &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

(1.20) denkleminin denge noktası  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$  olmak üzere bu denge noktasına göre kararlılık analizi oluşturulmaktadır. (1.19) sisteminin jakobiye matrisi,

$$J(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k) = \begin{pmatrix} f'_1(x_1(n)) & \cdots & f'_1(x_k(n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_k(x_1(n)) & \cdots & f'_k(x_k(n)) \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

biçiminde  $k \times k$  boyutunda bir matris elde edilir. (1.21) matrisinin özdeğerleri  $\theta$  olmak üzere

$$\det(J - \theta I) = 0 \quad (1.22)$$

eşitliği sonucunda

$$\theta^k + a_1\theta^{k-1} + a_2\theta^{k-2} + \cdots + a_k = 0 \quad (1.23)$$

karakteristik polinomu elde edilir. Bu denklem sonucunda bulunan özdeğerlerin  $|\theta_i| < 1, i = 1, 2, \dots, k$  kararlıdır. Aksi halde  $|\theta_i| > 1$  kararsızdır. Yüksek mertebeli sistemlerin kararlılığını bulmak için Jury kriteri kullanılmaktadır.

**Teorem 1.6. (Jury Teoremi).** Eğer bir dengede noktasındaki karakteristik denklemin (1.22) tüm kökleri  $\theta < 1$ 'i koşulunu sağlarsa, o zaman sistemin (1.19) başlangıç değerlerine sahip tüm çözümleri dengeye yaklaşır, yani kararlı olur (Elaydi,1996 - Sandefur,1990).

**İspat.** Bir denge noktasında  $k$  tane fark denkleminde oluşan sistemin karakteristik denklemi  $k$ . dereceden bir polinom denklemdir. Teoremin koşullarından bir polinom denkleminin tüm köklerinin mutlak değerinin 1'den az olduğu bilinmektedir. Bu koşullar başlangıçta bazı ekonomik modelleri analiz etmek için türetilmiştir (Samuelson, 1941). İkinci dereceden bir denklem için

$$f(\theta) = \theta^2 + a_1\theta + a_2 = 0 \quad (1.24)$$

Her iki kökte  $|\theta| < 1$  ancak ve ancak

$$1 + a_1 + a_2 > 0, \quad 1 - a_1 + a_2 > 0, \quad 1 + a_2 > 0$$

olması ile sağlanır. Bu üç koşul aşağıdaki gibi birleştirilirse Jury kriteri elde edilir:

$$0 < |a_1| < a_2 + 1 < 2 \quad (1.25)$$

Jury kriterini belirlemek için,  $f(\theta) \rightarrow +\infty$   $\theta \rightarrow \infty$  ve  $\theta \rightarrow -\infty$  olarak belirterek başlıyoruz.

$f(-1) < 0$  ise, -1'den küçük bir kök vardır ve  $f(1) < 0$  ise 1'den büyük bir kök vardır. Ayrıca, (1.24) köklerinin ürünü  $a_2$ 'dir; bu nedenle, (1.24)  $\theta < 1$ 'i tatmin etmek için  $a_2 < 1$ ,  $f(-1) > 0$ ,  $f(1) > 0$  olmalıdır. Bu koşulları  $-1 < a_2 < 1$  veya  $0 < a_2 + 1 < 2$ ,  $f(-1) = 1 - a_1 + a_2 > 0$ ,  $f(1) = 1 + a_1 + a_2 > 0$  olarak yeniden yazabiliriz.

Koşullar  $f(-1) > 0$  ve  $f(1) > 0$  vermek için birleştirilebilir

$$-(1 + a_2) < a_1 < 1 + a_2,$$

veya  $a_1 < 1 + a_2$ . Bu nedenle, (1.24) 'un köklerinin  $\theta < 1$ 'i karşılayabilmesi için, (1.25)'daki koşulların sağlanması gerekir. (1.25) 'daki koşulların (1.24) 'un köklerinin  $\theta < 1$  'i karşıladığını kanıtlamak için, ilk olarak (1.24) 'un köklerinin karmaşık eşlenik olduğu düşünülmektedir. Bu durumda, her iki kök de aynı mutlak değere sahiptir ve  $a_2 < 1$ , bu mutlak değerlerin 1'den küçük olduğunu ima eder. (1.24) 'ın kökleri gerçektir ve  $f(-1) > 0$ , her iki kökü -1'den küçüktür ( $a_2 < 1$  ile çelişir) veya  $f(1) > 0$  ise, her iki kök 1'den büyüktür ( $a_2 < 1$  ile çelişir) veya her iki kök de -1 ile 1 arasındadır. (1.25) her iki kökün

de  $\theta < 1$  olduğunu ve Jury kriterinin koşullarını sağlar. Bir sonraki bölümde, ilk derece fark denklemlerinden oluşan bir sistemi inceleyeceğiz. Bir kübik denklemin köklerinin hangi koşullar altında Jury teoremini sağladığı gösterilebilir.

$$\theta^3 + a_3\theta^2 + a_2\theta + a_1 = 0$$

$|\theta| < 1$  değerleri için kübik denkleminin köklerini aşağıdaki koşullarla gösterilebilir.

$$1 + a_3 + a_2 + a_1 > 0,$$

$$1 - a_3 + a_2 - a_1 > 0,$$

$$3 + a_3 - a_2 - 3a_1 > 0,$$

$$1 + a_3a_1 - a_2 - a_1^2 > 0,$$

(Samuelson, 1941).

### 1.3. Temel Çoğalma (Üreme) Sayısı

Temel üreme sayısı, 1952 yılında Macdonald tarafından sıtma bağlamında epidemiyoloji alanında kullanılmıştır. Temel üreme sayısı olan  $R_0$ , matematiksel epidemiyoloji çalışmalarında oldukça önemlidir. Bu sayı, duyarlı bir popülasyonda bulaşıcı dönemde tek bir enfekte birey tarafından üretilen yeni enfeksiyon sayısı olarak tanımlanmaktadır.

$R_0 < 1$  olduğunda duyarlı bir popülasyon giren birkaç enfekte birey, ortalama olarak değişmez ve hastalık yayılmaz denge noktası asimptotik kararlı olur. Aksi halde,  $R_0 > 1$  de ise enfekte olan birey sayısı artar ve hastalık yayılır denge noktası kararsız olur. Burada,  $R_0$  eşik parametresidir. Daha sonra,  $R_0$  ile edilen sonuçlar, duyarlı diyabet komplikasyon (SDC) modelinde olası etkileşim sayısını belirlemek için önemlidir.

Ayrık zamanlı epidemi modellerin çalışmalarında temel üretim sayısı iyi bilinmemektedir ve bu modellerin araştırılmasında  $R_0$  hesaplaması nadiren uygulansa da bu yaklaşım popülasyon modellerine uygun bir değerdir. Bu değer modelimizde bulduğumuz denge noktalarının kararlılığı hakkında bilgi vermektedir.

Temel üreme sayısının, bir hastalık organizmasında tamamen duyarlı bir popülasyon için eşik parametresi olduğu gösterilir ve bununla birlikte değerın yakınında bulunan endemik dengenin kararlılığını analiz etmek için kullanılmaktadır. Bazı modeller için temel üreme sayısının yakınında kararsız endemik dengeye sahip olabilmektedir.

Davranış, yaş ve hastalığın evresi ile  $n$  homojen bölmelere ayrılabilen heterojen bireylerin bir popülasyonunu düşünelim. Her  $x_i \geq 0$  için  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  ilk  $m < n$

bölmelerinin enfekte bireyler içerdiği her bölmedeki bireylerin sayısı olsun. Hastalıksız denge  $x_0$ 'da hastalık yokluğunda var olduğunu ve stabil olduğunu ve ayrıştırılmış  $x_1, \dots, x_m$ 'deki lineer denklemlerin diğerlerinden ayrıldığını varsayılmaktadır.  $x_{i+1} = \mathcal{F}_i(x) - \mathcal{V}_i(x)$   $i = 1, 2 \dots, m$  şeklinde yazılmış bu denklemleri göz önünde bulundurun. Bu bölünmede  $\mathcal{F}_i(x)$ , karşılaştırma  $i$ 'de yeni enfeksiyonların ortaya çıkma oranıdır ve  $\mathcal{V}_i(x)$ , karşılaştırma  $i$  ve diğer enfekte olmuş karşılaştırmalar arasındaki diğer geçişlerin oranıdır. Eğer  $i \in [m + 1, n]$   $\mathcal{F}_i(x)$  ve  $\mathcal{V}_i(x)$  ile  $\mathcal{F}_i = 0$  olduğu varsayılır.

Şimdi  $1 \leq i, j \leq m$  için  $\mathcal{F} = \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x_0)$  ve  $\mathcal{V} = \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0)$ 'yi tanımlayın.  $F$  ve  $V$ 'nin biyolojik anlamlarından,  $F$ 'nin girişsel olarak negatif olmadığı ve  $V$ 'nin tekil olmayan bir  $M$ -matrisi olduğu, bu nedenle  $V^{-1}$  girişsel olarak negatif olmayan bir sonuçtur.  $\psi(0)$ , başlangıçta enfekte olmuş bireylerin sayısı olsun. Daha sonra  $FV^{-1}\psi(0)$ , beklenen sayıda yeni enfeksiyon veren girişsel olarak negatif olmayan bir vektördür. Matris  $FV^{-1}$ , karşılaştırma  $j$ 'de sunulan enfekte olmuş bir kişi tarafından üretilen karşılaştırmada  $i$ 'de beklenen ikincil enfeksiyon sayısına eşit  $(i, j)$  girişe sahiptir. Böylece  $FV^{-1}$  yeni nesil matristir ve

$$R_0 = \rho(FV^{-1})$$

burada  $\rho$ , spektral yarıçapı belirtir. Hastalıksız denge lineer kararlılığı, jakobiyen matrisinden  $s(F - V)$  ile belirlenir; burada  $s$ , bazen spektral bağlı olarak adlandırılan özdeğerlerin maksimum gerçekte kısmını göstermektedir (Van den Driessche, 2017).

**Tanım 1.14.**  $A \in M_n(\mathbb{R})$  olmak üzere  $A$  matrisinin mutlak değerce en büyük özdeğerine  $A$ 'nın spektral yarıçapı denir ve  $\rho(A)$  ile gösterilir.

Yeni oluşturacağımız Duyarlı diyabet komplikasyon (SDC) modelinde bir popülasyon modelidir. Yani modelimizde birey yeri değişmeyip, enfeksiyon yerine şeker hücresi kullanılarak burada temel üreme sayısı olan  $R_0$  bulunmaktadır.  $R_0 < 1$  ise doğumda genetik bozukluğun olmadığı durum için global asimptotik olarak kararlı bir dengeye sahiptir ve  $R_0 > 1$  için ise sistem kararsız bir dengeye sahip olmaktadır.

#### 1.4. Olasılık Kuramı ile İlgili Temel Kavramlar

Bu bölümde olasılık kuramının temel kavramları olan deney, rastgele deney, deterministik deney, rastgele olay kavramları tanımlanacaktır (Feller, 1968; Akdeniz, 2014).

**Tanım 1.15.** Bir sistem ile ilgili gözlemlere dayanarak ilgili bir yasayı doğrulamak, bir varsayımı kanıtlamak amacı ile yapılan işleme deney denir.

**Tanım 1.16.** Sonucu kesin olarak bilinen deneylere deterministik deney denir.

**Tanım 1.17.** Sonuçları ortaya çıkacağı önceden söylenemeyen bir deneye veya belirsizlik taşıyan bir ölçüme, gözleme veya herhangi bir durumu ifade eden işleme rastgele deney denir.

**Tanım 1.18.** Bir rastgele deneyin olası tüm sonuçlarının kümesine örnek uzay denir.  $(S, \Omega)$  ile gösterilir.

**Tanım 1.19.**  $\Omega \neq \emptyset$  bir küme ve  $U$  da  $\Omega$  üzerinde bir sınıf olmak üzere  $U$  sınıfı

- i.  $\Omega \in U$
- ii.  $\forall A \in U \text{ için } A^c \in U$
- iii.  $A_1, A_2 \in U \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in U$

koşullarını sağlıyor ise  $U$  sınıfına Boole cebiri veya olayların  $\sigma$  cebri denir.

**Tanım 1.20.**  $\Omega \neq \emptyset$  ve  $F$  bu kümenin üzerinde tanımlanmış bir  $\sigma$ -cebiri, ayrıca  $P: F \rightarrow R$  ye bir küme fonksiyonu olsun.  $P$  fonksiyonunun aşağıdaki aksiyomları sağlaması halinde olasılık ölçüsü veya kısaca olasılık olarak adlandırılır.

- i. Her  $A \in F$  olayı için  $P(A) \geq 0$ ,
- ii.  $P(\Omega) = 1$ ,
- iii.  $A_1, A_2, \dots \in F$  olayları ayrık olaylar ( $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ ) ise

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

olsun.

Bu durumda  $(\Omega, F, P)$  üçlüsüne olasılık uzayı denir ve bu olasılık uzayı bir rastgele deneyin olasılık modelini oluşturur.

**Tanım 1.21.**  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  bir olasılık uzayı ve  $X: \Omega \rightarrow R$  bir fonksiyon olmak üzere  $\forall x \in R$  için  $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$  ise  $X$  fonksiyonuna rastgele değişken denir.

**Tanım 1.22.**  $X$  bir rastgele değişken olmak üzere  $X$ 'in alabileceği değerler kümesi,

- i. Eğer değer kümesi sonlu ve sayılabilir sonsuz bir alt kümesi ise  $X$  rastgele değişkenine kesikli rastgele değişken
- ii. Eğer değer kümesi bir aralık şeklinde bir alt küme ise  $X$  rastgele değişkenine sürekli rastgele değişken denir.

**Tanım 1.23.**  $X$  rastgele değişkeni sonlu sayıdaki  $x_1, x_2, \dots, x_n$  değerlerini  $p(x_i) = P(X = x_i), i = 1, 2, \dots, n$  olasılıkları ile alabilen kesikli rastgele değişken olduğunda, aşağıdaki koşulları sağlayan  $p(x) \equiv f(x)$  fonksiyonuna  $X$  rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu denir.

- i.  $p(x_i) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$
- ii.  $\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1.$

**Tanım 1.24.**  $X$  rastgele değişkeni sürekli bir rastgele değişken olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan  $f_x(x)$  fonksiyonuna  $X$  rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

- i.  $f_X(x) \geq 0,$
- ii.  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$

**Tanım.**  $X$  kesikli rastgele değişkeni için, olasılık yoğunluk fonksiyonu  $p(a)$

$$p(a) = P = \{X = a\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

**Tanım 1.25.**  $X, p(x)$  olasılık kütle fonksiyonuna sahip, kesikli bir rastgele değişken olmak üzere  $X$ 'in beklenen değeri

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca  $X$  rastgele değişkeninin beklenen değeri  $\mu$  ile gösterilmektedir.

**Özellik 1.1.** Rastgele değişkenlerin beklenen değerlerinin mevcut ve sonlu olmak üzere

- i.  $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- ii. Herhangi  $a, b \in \mathbb{R}$  için  $E[aX + b] = aE[X] + b$

**Tanım 1.26.**  $X$  rastgele değişkeninin beklenen değeri  $\mu$  olmak üzere, varyansı

$$\begin{aligned} Var[X] &= E[(X - \mu)^2] \\ &= E[X^2] - \mu^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

**Özellik 1.2.**

- i.  $X$  rastgele bir değişken olmak üzere  $a, b$  sabiti için

$$Var[aX + b] = a^2 Var[X]$$

dir.

- ii.  $X$  ve  $Y$  rastgele değişkenleri için

$$Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$$

dir.

**Tanım 1.27.** Eğer  $E(|X|^n) < \infty$  ise

$$\alpha_n = E(X^n)$$

sayısına  $X$  rastgele değişkeninin  $n$ . mertebeden başlangıç momenti denir. Eğer  $n = 1$  için  $\alpha_1 = E(X)$  beklenen değerini elde edilir.

**Tanım 1.28.** Eğer  $E(|X|^n) < \infty$  ise

$$\mu_n = E[(X - \alpha)^n]$$

sayısına  $X$  rastgele değişkeninin  $\alpha = E(X)$  sayısına göre  $n$ . merkezi momenti denir.  $n = 2$  için  $\mu_2 = E(X - \alpha)^2 = Var(X)$  elde edilir.

**Tanım 1. 29.**  $X$  rastgele değişken,  $f_X(x)$  onun olasılık fonksiyonu olup  $X$ 'in kesikli durumunda  $E(e^{tx}) < \infty$  moment çıkaran fonksiyonu

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} f_X(x)$$

dir .

### Özellik 1.3.

- i.  $M_X^{(n)}(t) \Big|_{t=0} = 1$
- ii. Moment çıkaran fonksiyon kullanılarak, ise

$$|E(X^n)| = |\alpha_n| < \infty \text{ ise } M_X^{(n)}(t) \Big|_{t=0} = E(X^n) = \alpha_n, n = 1, 2, 3, \dots$$

dir (Khanniyev vd.2017).

#### 1.4.1. Bazı Kesikli Dağılımlar

Bu bölümde kullanılmakta olan bazı olasılık kavramları ile ilgili tanımlar verilmektedir (Feller,1968).

##### 1.4.1.1. Kesikli Düzgün Dağılım

Kesikli rastgele değişkeni tanımlı olduğu tüm noktalarda eşit olasılık değerine sahip ise kesikli düzgün dağılımına uygundur.

**Tanım 1.30.**  $X$  bir rastgele değişkenleri  $x_1, x_2, \dots, x_n$  eşit olasılıklı  $n$  sonuca sahipse  $X$  rastgele değişkenine kesikli düzgün rastgele değişken denir.  $X$  rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$P(X = m) = \frac{1}{n} \quad m = x_1, x_2, \dots, x_n$$

şeklindedir.

**Teorem 1.7.** Eğer  $X$  bir kesikli uniform dağılıma sahip ise,

a.  $E(X) = \frac{k+1}{2},$

b.  $V(X) = \frac{k^2-1}{12}$

c.  $M_X(t) = \frac{1}{k} \sum_{x=1}^k e^{tx}$

**İspat.**  $\sum_{x=1}^k x = \frac{k(k+1)}{2}$  ve  $\sum_{x=1}^k x^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{12}$  olduğundan

a.  $E(X) = \sum_{x=1}^k x \frac{1}{k} = \frac{k+1}{2}$

elde edilir.



$$b. E(x^2) = \sum_{x=1}^k x^2 \frac{1}{k} = \frac{k(k+1)(k+2)}{12}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= \frac{(k+1)(k-1)}{12} \\ &= \frac{(k^2 - 1)}{12} \end{aligned}$$

bulunur.

#### 1.4.1.2. Bernoulli Dağılımı

İsviçreli bilim adamı Jacob Bernoulli tarafından bulunmuştur. İki ayrık olay olarak tanımlanabilen  $p$  başarı ile 1 değerini alan ve  $q = 1 - p$  başarısızlık ile 0 değerini alan olasılıkta bir rassal deneydir.  $X$  şans değişkeni

$$P(x = 1) = p \text{ ve } P(x = 0) = 1 - p = q$$

**Tanım 1.31.**  $X$  rastgele değişkeninin sonuçlarının gerçekleşme olasılıkları  $p, q = 1 - p$  ile gösterilir ve  $X$ 'e Bernoulli rastgele değişkeni denir. Bernoulli olasılık kütle fonksiyonu,

$$f(x, p) = p^x (1 - p)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

olur.

**Teorem 1.8.** Eğer  $X$  bir Bernoulli dağılımına sahip ise,

$$a. E(X) = p$$

$$b. V(X) = p(1 - p)$$

$$c. M_x(t) = e^t p + (1 - p)$$

**İspat.**

$$a. E(X) = \sum_{x=0}^1 x p^x (1 - p)^{1-x} = p$$

$$\begin{aligned} b. E(X^2) &= \sum_{x=0}^1 x^2 p^x (1 - p)^{1-x} = p \\ V(X) &= p - p^2 = p(1 - p) \end{aligned}$$

$$c. E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^1 e^{tx} p^x (1 - p)^{1-x} = e^t p + (1 - p)$$

bulunur.

### 1.4.1.3. Binom Dağılımı (İki Terimli Dağılım)

Tek bir Bernoulli deneyinden binom dağılımı ortaya çıkmaktadır. Binom dağılımı,  $n$  adet denemede elde edilen  $x$  kez istenen sonucu amaçlar. Binom olasılık dağılımı iki sonuçlu rassal değişkenli deneyin her tekrarında sonra bu iki sonuçtan birinin ortaya çıkması ile oluşur.

**Tanım 1.32.** Birbirinden bağımsız  $n$  Bernoulli denemesinden  $x$ , bir tek denemeleri için başarılı olma olasılığı  $p$ , başarısız olma olasılığı  $(1 - p)$  ise aşağıdaki koşulları sağlayan  $x$ 'e binom rastgele değişkeni denir ve  $x$ 'in olasılık fonksiyonu;

$$f(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

olur. Ardışık binom olasılıklarının hesaplanması ise,

$$f(x + 1; n, p) = \frac{(n - x)p}{(x + 1)(1 - p)} f(x; n, p) \quad x = 0, 1, \dots, n - 1$$

**Teorem 1.9.** Eğer  $X$  bir binom dağılımına sahip ise,

- a.  $E(X) = np$
- b.  $V(X) = np(1 - p)$
- c.  $M_x(t) = [e^t p + (1 - p)]^n$

**İspat.**

$$\begin{aligned} \text{a. } E(X) &= \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \\ &= np \sum_{x=0}^n \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1 - p)^{n-x} \\ &= np [p + (1 - p)]^{n-1} \\ &= np \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } E(x^2) &= \sum_{x=0}^n x(x-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!(n-x)!} p^2 p^{x-2} (1 - p)^{n-x} + \sum_{x=0}^n x f(x) \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} (1 - p)^{n-x} + np \\ &= np^2(n-1) + np \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x) &= n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 \\ &= np(1 - p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c. M_x(t) &= E(e^{tX}) \\
&= \sum_{x=0}^n e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=0}^n e^{tx} \binom{n}{x} (e^t p)^x (1-p)^{n-x}
\end{aligned}$$

Burada binom teoremine göre;

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} a^x b^{n-x}$$

olduğundan  $a = e^t p$  ve  $b = (1-p)$  alınarak

$$M_x(t) = [e^t p + (1-p)]^n$$

bulunur.

#### 1.4.1.4. Negatif Binom Dağılımı (Pascal Dağılımı)

Negatif binom dağılımında, Bernouilli denemesinin özelliklerine sahip bir rastgele değişkendir ve başarı sayısı sabittir.

**Tanım 1. 33.** Her bir denemede  $p$  başarı olasılığı olmak üzere  $k$  başarının elde edilmesi için gereken denemelerin sayısı  $x$  rastgele değişkeni olsun. Bu takdirde  $x$ 'e negatif binom rastgele değişkeni denir ve olasılık fonksiyonu;

$$f(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k} \quad x = k, k+1, \dots$$

dir.

**Teorem 1.10.** Eğer  $x$  bir negatif binom dağılımına sahip ise,

$$a. E(X) = \frac{k}{p}$$

$$b. V(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$$

$$c. M_x(t) = p^k e^{tx} \frac{1}{[1 - e^t(1-p)]^k}$$

**İspat.**

a. Negatif binom dağılımının beklenen değeri;

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=k}^{\infty} x \frac{(x-1)!}{(x-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{x-k} \\
&= p^k (1-p)^{x-k} \sum_{x=k}^{\infty} x \frac{(x-1)!}{(x-k)!(k-1)!} (1-p)^x \\
&= p^k (1-p)^{-k} \left[ k(1-p)^k + k(k+1)(1-p)^{k+1} + \frac{k(k+1)(k+2)}{2!} (1-p)^{k+2} + \dots \right] \\
&= p^k (1-p)^{-k} \left[ k(1-p)^k \left( 1 + (k+1)(1-p) + \frac{k(k+1)(k+2)}{2!} (1-p)^2 + \dots \right) \right]
\end{aligned}$$

Burada köşeli parantez içindeki ifade,  $f(1-p) = [1 - (1-p)]^{-k-1}$  fonksiyonunun MacLauren açılımına eşittir.

$$\begin{aligned}
f(1-p) &= [1 - (1-p)]^{-k-1} \Rightarrow f'(0) = 1 \\
f(1-p) &= -(k+1)[1 - (1-p)]^{-k-2}(-1) \Rightarrow f'(0) = (k+1) \\
f(1-p) &= -(k+1)(k+2)[1 - (1-p)]^{-k-3}(-1) \Rightarrow f'(0) = (k+1)(k+2)
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$f(1-p) = [1 - (1-p)]^{-k-1} = 1 + \frac{(k+1)}{1!} (1-p) + \frac{(k+1)(k+2)}{2!} (1-p)^2 + \dots$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
E(X) &= p^k k [1 - (1-p)]^{-k-1} \\
&= \frac{k}{p}
\end{aligned}$$

bulunur.

b. Negatif binom dağılımının varyansı

$$\begin{aligned}
E(x^2) &= \sum_{x=k}^{\infty} x^2 f(x) \\
&= \sum_{x=k}^{\infty} x(x-1)f(x) + \sum_{x=k}^{\infty} xf(x) \\
&= \sum_{x=k}^{\infty} x(x-1) \frac{(x-1)!}{(x-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{x-k} + E(x) \\
&= p^k (1-p)^{-k} \sum_{x=k}^{\infty} x(x-1) \frac{(x-1)!}{(x-k)!(k-1)!} (1-p)^x + E(x)
\end{aligned}$$

$E(x)$  için izlenen yol kullanılarak,

$$\begin{aligned} E(x^2) &= \frac{k(k+1) - 2k(1-p)}{p^2} + \frac{k}{p} \\ &= \frac{k^2 - kp + k}{p^2} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{k^2 - kp + k}{p^2} - \frac{k^2}{p^2} \\ &= \frac{k(1-p)}{p^2} \end{aligned}$$

bulunur.

c. Negatif binom dağılımının moment türeten fonksiyonu,

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E[e^{xt}] \\ &= \sum_{x=k}^{\infty} e^{xt} \frac{(x-1)!}{(x-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{x-k} \\ &= p^k (1-p)^{-k} \sum_{x=k}^{\infty} e^{xt} \frac{(x-1)!}{(x-k)!(k-1)!} (1-p)^x \\ &= p^k (1-p)^{-k} \left[ e^{xt} (1-p)^k + e^{t(k+1)} \frac{k}{1!} (1-p)^{k+1} + e^{t(k+2)} \frac{k(k+1)}{2!} (1-p)^{k+2} + \dots \right] \\ &= p^k (1-p)^{-k} e^{xt} (1-p)^k \left[ 1 + e^t (1-p)k + e^{2t} (1-p)^2 \frac{k(k+1)}{2!} + \dots \right] \end{aligned}$$

Burada köşeli parantez içinin  $[1 - [e^t(1-p)]]^{-k}$  fonksiyonunun MacLauren açılımı olduğundan,

$$M_x(t) = p^k e^{tx} \frac{1}{[1 - [e^t(1-p)]]^k}$$

elde edilir.

#### 1.4.1.5. Geometrik Dağılım

Geometrik dağılım, bir dizi Bernoulli denemesinde başarıya ulaşmadan önceki başarısızlıkların sayısını temsil eder. Bu dağılımda çıktı iki ayrık olay tanımlar ve  $p$ , başarı olasılığı sabittir. İlk başarının elde edilmesi için gerekli denemelerin sayısı  $x$ , geometrik rastgele değişkenidir. Şans değişkeni  $x$  ilk başarı elde edilinceye kadar gerçekleştirilen

deney sayı olarak tanımlandığında, şans değişkeninin dağılımı geometrik olasılık dağılımına uygundur.  $k = 1$  olduğunda negatif binom dağılımı olarak ifade edilir.

**Tanım 1.34.**  $X$ , rastgele değişkeni tek bir denemede başarısızlık olasılığı  $q = 1 - p$  ve sabit bir başarı olasılığı  $p$  olan geometrik dağılımına sahiptir ve değişkeninin olasılık fonksiyonu;

$$P(X = x) = pq^{x-1} \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

dir.

**Teorem 1.11.**  $X$  bir geometrik dağılıma sahip olsun.

a.  $E(X) = \frac{1}{p}$

b.  $V(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$

c.  $M_x(t) = pe^t \frac{1}{1-[e^t(1-p)]}$

**İspat.**

a. Beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{x-1} \\ &= p \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} \\ &= p \frac{d}{d(1-p)} \left[ \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^x \right] \\ &= p \frac{d}{d(1-p)} [(1-p) + (1-p)^2 + \dots] \\ &= p \frac{d}{d(1-p)} [(1-p)[1 + (1-p) + (1-p)^2 + \dots]] \\ &= p \frac{d}{d(1-p)} \left[ (1-p) \frac{1}{1-(1-p)} \right] \end{aligned}$$

Burada  $\frac{1}{1-x} = [1 + x + x^2 + \dots]$  eşitliği kullanılmıştır.

$$\begin{aligned}
E(x) &= p \left[ \frac{1}{1 - (1 - p)} + (1 - p)[1 - (1 - p)]^{-2} \right] \\
&= p \left[ \frac{1}{p} + \frac{(1 - p)}{p^2} \right] \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

b. Varyansı,

$$\begin{aligned}
E(x^2) &= \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)p(1-p)^{x-1} + \sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{x-1} \\
&= p(p-1) \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)p(1-p)^{x-2} + E(x) \\
&= p(1-p) \frac{d^2}{d(1-p)^2} \{(1-p)[1 + (1-p) + \dots]\} + E(x) \\
&= p(1-p) \frac{d^2}{d(1-p)^2} \left\{ \frac{(1-p)}{1 - (1-p)} \right\} + E(x) \\
&= p(1-p) \frac{d}{d(1-p)} \left\{ \frac{1}{1 - (1-p)} + (1-p)[1 - (1-p)]^{-2} \right\} + \frac{1}{p} \\
&= p(1-p) \left\{ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} + (1-p) \frac{2}{p^3} \right\} + \frac{1}{p} \\
&= p(1-p) \left\{ \frac{p + p + 2 - 2p}{p^3} \right\} + \frac{1}{p} \\
&= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Burada varyansı,

$$\begin{aligned}
V(x) &= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \left[ \frac{1}{p} \right]^2 \\
&= \frac{(1-p)}{p^2}
\end{aligned}$$

bulunur.

c. Dağılımın moment türeten fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
M_x(t) &= E[e^{tx}] \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} p(1-p)^{x-1} \\
&= \frac{p}{(1-p)} \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} (1-p)^x \\
&= \frac{p}{(1-p)} \sum_{x=1}^{\infty} [e^t(1-p)]^x \\
&= \frac{p}{(1-p)} [e^t(1-p)[1 + e^t(1-p) + \dots]] \\
&= pe^t \frac{1}{1 - [e^t(1-p)]}
\end{aligned}$$

elde edilir.

#### 1.4.1.6. Hipergeometrik Dağılım

Hipergeometrik dağılım, binom dağılımına benzemektedir. Hipergeometrik dağılımında denemeler bağımsızdır. Bundan dolayı başarı olasılığı her deneme sonucu farklı sonuç vermektedir. Eleman sayısının  $n$  olduğu ana kütle ve  $N$  örnek hacmi olduğunu varsayalım. Denemeler birbiri ile bağımlı ve ana kütle özelliğine sahip eleman sayısına  $M$  diyelim.  $N$  hacimli örnekte  $X$  adet başarının ortaya çıkma olasılığı, hipergeometrik dağılım ile belirlenir.

**Tanım 1.35** Sonlu sayıda  $N$  öğeden oluşan bir kitle içinde tekrar yerine koymaksızın rastgele çekilen ve  $n$  birimden oluşan bir örneklem tipindeki öğelerin sayısı  $X$  olsun.  $X$  rastgele hipergeometrik değişkendir ve hipergeometrik olasılık fonksiyonu;

$$f(x; N, M, n) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad x = 0, 1, \dots, n$$

**Teorem 1.12.**  $X$  bir hipergeometrik dağılıma sahip ise,

a.  $E(X) = \frac{nM}{N}$

b.  $V(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}$

c.  $M_x = \frac{N-n}{N-1} n \frac{M}{N} (1 - \frac{M}{N})$



**İspat.** Dağılımın beklenen değeri,

$$E(x) = \sum_{x=0}^n \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \sum_{x=1}^n \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Burada ifadeyi değerlendirmek için aşağıdaki eşitlikler kullanılır.

$$\begin{aligned} x \binom{M}{x} &= M \binom{M-1}{x-1} \\ \binom{N}{n} &= \frac{N}{n} \binom{N-1}{n-1} \end{aligned}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{x=1}^n \frac{M \binom{M-1}{x-1} \binom{N-M}{n-x}}{\frac{N}{n} \binom{N-1}{n-1}} \\ &= \frac{nM}{N} \sum_{x=1}^n \frac{\binom{M-1}{x-1} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N-1}{n-1}} \end{aligned}$$

Eşitliğin sağındaki parametreleri  $N-1$ ,  $M-1$  ve  $n-1$  olan bir hipergeometrik dağılımın olasılıklarının toplamıdır. Bunu görebilmek için  $y = x-1$  tanımlanarak ve  $\sum_{x=0}^n f(x) = 1$  (olasılık fonksiyonu)  $\sum_{x=0}^n \binom{a}{x} \binom{N-a}{n-x} = \binom{N}{n}$  olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^n \frac{\binom{M-1}{x-1} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N-1}{n-1}} &= \sum_{y=0}^{n-1} \frac{\binom{M-1}{y} \binom{N-M}{n-y-1}}{\binom{N-1}{n-1}} \\ &= \sum_{y=0}^{n-1} P[Y = y; N-1, M-1, n-1] \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$E(x) = \frac{nM}{N}$$

b. Dağılımın varyansı,

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=0}^n \frac{[x(x-1) + x] \binom{a}{x} \binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\
&= \sum_{x=0}^n \frac{x(x-1) \binom{a}{x} \binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}} + \sum_{x=0}^n \frac{x \binom{a}{x} \binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}} \\
&= \frac{a(a-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{na}{N} = \frac{na}{N(N-1)} [(a-1)(n-1) + (N-1)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= \frac{na(na-a-n+N)}{N(N-1)} - \frac{n^2 a^2}{N^2} = \frac{N-n}{N-1} n \frac{a}{N} \left(1 - \frac{a}{N}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

#### 1.4.1.7. Poisson Dağılımı

Ünlü Fransız matematikçi Simeon Poisson tarafından adlandırılmaktadır. Bir örnek uzayın gerçekleşme zamanındaki olayların sayısının veya belli bir bölgesi incelendiği kesikli bir olasılık dağılımıdır.

**Tanım 1.36.**  $X$  rastgele değişkeni  $0, 1, 2, \dots$  değerlerini alabilen bir Poisson rastgele değişkeni olsun.  $X$  rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$P(X = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \lambda > 0$$

şeklindedir.

**Teorem 1.13.**  $X$  bir poisson dağılımına sahip ise,

a.  $E(X) = \lambda$

b.  $V(X) = \lambda$

c.  $M_x = e^{\lambda(e^t - 1)}$

**İspat.**

a. Dağılımın beklenen değeri,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} xf(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{xe^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}
\end{aligned}$$

Burada  $y = x - 1$  dönüşümü ile denklemin sağ tarafındaki toplamı  $e^{\lambda}$ 'ya eşit olur.

$$E(X) = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

elde edilir.

b. Dağılımın varyansı,

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x^2 e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

Bu denklemde  $x^2 = x(x-1) + x$  özdeşliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(x(x-1) + x)e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{((x-1)e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{xe^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-2)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + E(X)
\end{aligned}$$

Burada  $y = x - 2$  dönüşümü ile denklemin sağ tarafındaki toplam  $e^{\lambda}$ 'ya eşit olur.

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}$$

elde edilir.

c. Dağılımın moment türeten fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
 M_x(t) &= E[e^{tx}] \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^x}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \\
 &= e^{\lambda(e^t - 1)}
 \end{aligned}$$

olur.

### 1.5. Rastgele Fark Denklemleri

Deteministik fark denklemlerini kullanarak aşağıdaki üç temel şekilde rastgele fark denklemler elde edilebilmektedir.

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), \quad n = 0, 1, \dots$$

şeklindeki bir  $k$ . mertebeden fark denklemi göz önünde bulundurulsun. Bu fark denklemi

i. Rastgele başlangıç değerleri ile

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}, n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_{-k}, x_{-(k-1)}, \dots, x_0 \in I$$

şeklinde  $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \dots, x_0$  rastgele değişkeni kullanılarak,

ii. Rastgele homojen olmayan terim ile

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}, n) + Y(n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_{-k}, x_{-(k-1)}, \dots, x_0 \in I$$

şeklinde bir rastgele  $Y(n)$  sürecini kullanarak ve

iii. Rastgele katsayılar ile

$$x_{n+1} = A(n)f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}, n) + Y(n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_{-k}, x_{-(k-1)}, \dots, x_0 \in I$$

şeklinde bir rastgele  $A(n)$  katsayısı ile ifade edilen bir rastgele süreci kullanarak bir rastgele fark denklem haline getirebiliriz (Soong, 1973).

## 1.6. Stokastik Fark Denklemleri

Stokastik fark denklemleri, uygun başlangıç şartları için tek bir çözüme sahip olan deterministik modellerin aksine stokastik fark denklemlerin çözümleri ayrık zamanlı stokastik süreçlere sahiptir. Stokastik fark denklemlerinin çözümlerinin hesaplamak için kullanılan yöntemler, fark denklemleri için benzer tekniklere dayanmaktadır ve stokastik dinamiğine destek sağlamak için genelleştirilmiştir (Saure,2012).

### 1.6.1. Stokastik Fark Denklemlerin Bazı Sayısal Çözüm Yöntemleri

Birinci mertebeden fark denklemi

$$x_{n+1} = F(n, x_n), \quad n \in N \quad (1.26)$$

her bir neslin büyüklüğünün bir öncekinin bir fonksiyonu olduğu ayrı bir zamanda gelişen olguları tanımlamak için kullanılabilir. Ancak gerçek hayat problemleri genellikle bu türden düzgün bir matematiksel modeli ile ifade edilemez. Öngörülemez etkiler rastgele değişkenler  $\{\xi_n\}$  dizisi şeklinde modele dâhil edilerek ve bunun sonucunda stokastik bir fark denklemi elde edilir.

$$x_{n+1} = F(n, x_n) + G(x, x_n)\xi_{n+1}, \quad n \in N \quad (1.27)$$

(1.27) 'nin çözümü,  $\{\xi_n\}$  'nin doğal filtremelerle uyumlu ayrık zamanlı stokastik süreçtir. Stokastik fark denklemleri de stokastik diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırılması olarak ortaya çıksa da asimptotik özelliklerinin analizi daha zor olabilir. Burada hem ayrık zamanda gelişen modellenmenin hem de stokastik diferansiyel denklemler için sayısal yöntemin analizi üzerinde etkileri vardır (Elaydi,2005).

Stokastik fark denklemlerinin asimptotik özelliklerini analiz etmek oldukça zor olsa deterministik fark denklem teorisinde tam bir giriş bulunmamaktadır (Elaydi,2005).

Matematiksel biyoloji, ayrık zamanda gelişen gerçek dünya problemlerini aramak için çok iyi bir yere sahiptir ve aşağıdaki stokastik fark denklemi

$$X_{n+1} = X_n[N(X_n) + Q(X_n)\xi_{n+1}], \quad n \in N \quad (1.28)$$

olarak elde edilmektedir.

Stokastik fark denklemleri sayısal analizde ortaya çıkar, çünkü bunlar stokastik diferansiyel denklemlerin ayrıklaştırılmasının son ürünüdür.

$$dX(t) = X(t)f(X(t))dt + X(t)g(X(t))dB(t), t \geq 0 \quad (1.29)$$

Burada  $B$  tek boyutlu bir Brownian hareketidir. Burada  $f$  ve  $g$  gerçel değerli fonksiyonlarla sınırlı olup Lipschitz sürekli olması için, (1.29) için benzersiz güçlü çözeltiler mevcuttur, denklem  $X(t) \equiv 0$  bir denge çözeltilisine sahip olur (Mao,1997; Karatzas,1998; Murray,2004).

Tek adımlı Euler-Maruyama sayısal düzen ile (1.29) denklemi ayrıklaştırılabilir. Bu stokastik fark denklemini

$$X_{n+1} = X_n + hf(X_n) + \sqrt{h}g(X_n)\xi_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.30)$$

şeklinde ifade edilen buradaki  $\{\xi_n\}$ , standart normal rastgele değişkenler dizisidir,  $h$  ise ağ boyutudur (Kelly ve Rodkina, 2009).

Euler-Milstein Ayrıklaştırması (1.29) denkleminde oluşan doğrusal olmayan stokastik fark denklemini

$$X_{n+1} = X_n \left[ 1 + hf(X_n) + \sqrt{h}g(X_n)\xi_{n+1} + \frac{h}{2}g(X_n)(g(X_n) + X_ng'(X_n))(\xi_{n+1}^2 - 1) \right], \in n \in N \quad (1.31)$$

$X_0 \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$  ve  $\{\xi_n\}_{n \in N}$ , ile karşılıklı olarak bağımsız  $N(0,1)$  rastgele değişkenler dizisidir.  $f$  ve  $g$  gerçel değerli fonksiyonlarla sınırlandırılın,  $g$  tüm  $\mathbb{R}$  'de sürekli ve ayırt edilebilir ve tüm  $x \in \mathbb{R}$  için  $|xg'(x)|$  (1.31) 'nin çözeltileri, tam bir filtrelenmiş olasılık uzayında  $(\Omega, F, \{F_n\}_{n \in N}, P)$  tanımlanır, burada  $\{F_n\}_{n \in N}, \{\xi_n\}_{n \in N}$  dizisi tarafından üretilen filtrasyondur.  $f$  ve  $g$  arasındaki ilişki,  $X_0 \neq 0$  ve  $h$  yeterince küçük olduğunda,

$$P \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \inf |X_n| > 0 \right] = 1. \quad (1.32)$$

$X_0 = 0$  olduğunda  $X_n \equiv 0$  denge çözeltilisine sahip olduğuna ve (1.32) denkleminde denge kararsızdır. Euler-Milstein sayısal yöntemi, güçlü bir yakınsama sırası 1/2 olan Euler-Maruyama yönteminin aksine, güçlü yakınsama 1 ile stokastik bir Taylor yaklaşımıdır (Kloeden ve Platen, 1992).

Stokastik fark denklemlerinin kesin çözümü mevcut değildir ve bu nedenle ortaya çıkan stokastik fark denklemleri çözmek için uygun sayısal yöntemler kullanılmaktadır. ODE'lere benzer şekilde genelleştirilmesi olarak stokastik Runge-Kutta yöntemleri etkili olmuştur (Parsamanesh,2020). Fark denklemlerde olduğu gibi yüksek dereceli Runge-Kutta

şemalarında olduğu gibi yüksek mertebeden doğruluk elde etmeye çalışılabilir.  $(m + 1)$ . mertebeden şemaları aşağıdaki gibi

$$\bar{X}_n = \bar{X}_{n-1} + \sum_{i=0}^m p_i F_i h + \sum_{i=0}^m q_i G_i \Delta W_n$$

ifade edilmektedir (Grad,1988). Stokastik denklemi

$$\begin{aligned} \bar{X}_0 &= X_0 \\ F_0 &= f(t_{n-1} + \alpha_0 h, \bar{X}_{n-1}), \quad G_0 = g(t_{n-1} + \alpha_0 h, \bar{X}_{n-1}), \\ X_{n-1}^{(1)} &= \bar{X}_{n-1} + \beta_{10} F_0 h + \gamma_{10} G_0 \Delta W_n, \\ F_1 &= f(t_{n-1} + \alpha_1 h, X_{n-1}^{(1)}), \quad G_1 = g(t_{n-1} + \alpha_1 h, X_{n-1}^{(1)}) \\ X_{n-1}^{(2)} &= \bar{X}_{n-1} + [\beta_{20} F_0 + \beta_{21} F_1] h + [\gamma_{20} G_0 + \gamma_{21} G_1] \Delta W_n \\ F_2 &= f(t_{n-1} + \alpha_2 h, X_{n-1}^{(2)}), \quad G_2 = g(t_{n-1} + \alpha_2 h, X_{n-1}^{(2)}) \\ &\vdots \\ X_{n-1}^{(m)} &= \bar{X}_{n-1} + \sum_{j=0}^{m-1} \beta_{mj} F_j h + \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{mj} G_j \Delta W_n, \\ F_m &= f(t_{n-1} + \alpha_m h, X_{n-1}^{(m)}), \quad G_m = g(t_{n-1} + \alpha_m h, X_{n-1}^{(m)}) \end{aligned} \tag{1.33}$$

ve

$$\sum_{i=0}^m p_i = \sum_{i=0}^m q_i = 1$$

olacak şekilde (1.33) şemasına göre 2. mertebeden Runge-Kutta denklemi elde edilmektedir. Bu şemaya göre,  $m = 1$  için  $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = \beta_{10} = \gamma_{10} = 1, p = q_0 = q_1 = \frac{1}{2}$ , parametre değerleri ortaya çıkar ve  $\lambda = \frac{1}{2}$  düzeltme faktörüdür. Bu değerler (1.33) şemasında yerine yazılarak 2. mertebeden Runge-Kutta denklemi ile stokastik fark denklemlerinin yaklaşık çözümleri elde edilebilir. 4. Mertebeden Stokastik Runge-Kutta metodunu elde edebilmek için (1.33) şemasında  $m = 3$  alınır ve

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \beta_{20} = \beta_{30} = \beta_{31} = \gamma_{20} = \gamma_{30} = \gamma_{31} = 0, \\ \alpha_0 &= \alpha_2 = \beta_{10} = \beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{1}{2}, \\ \alpha_3 &= \beta_{32} = \gamma_{32} = 1, \\ p_0 &= p_3 = q_0 = q_3 = \frac{1}{6}, \\ p_1 &= p_2 = q_1 = q_2 = 1/3. \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilmektedir ve bu değerleri (1.33) şemasında yerine yazıldığında

$$\bar{X}_n = \bar{X}_{n-1} + \frac{1}{6} \{ [F_0 + 2F_1 + 2F_2 + F_3]h + [G_0 + 2G_1 + 2G_2 + G_3] \Delta W_n \} \quad (1.34)$$

ve buradan

$$\begin{aligned} F_0 &= f(t_{n-1}, \bar{X}_{n-1}), \\ F_1 &= f\left(t_{n-1} + \frac{1}{2}h, \bar{X}_{n-1} + \frac{1}{2}F_0h + \frac{1}{2}G_0 \Delta W_n\right) \\ F_2 &= f\left(t_{n-1} + \frac{1}{2}h, \bar{X}_{n-1} + \frac{1}{2}F_1h + \frac{1}{2}G_1 \Delta W_n\right) \\ F_3 &= f(t_{n-1}, \bar{X}_{n-1} + F_2h + G_2 \Delta W_n) \end{aligned} \quad (1.35)$$

ve  $G_i$  aynı noktalarda değerlendirilen  $g$ 'yi tanımlar (Grad,1988). Bu yaklaşımları kullanarak Stokastik duyarlı diyabet komplikasyon (SDC) modelinin yaklaşık çözümleri elde edilecektir.

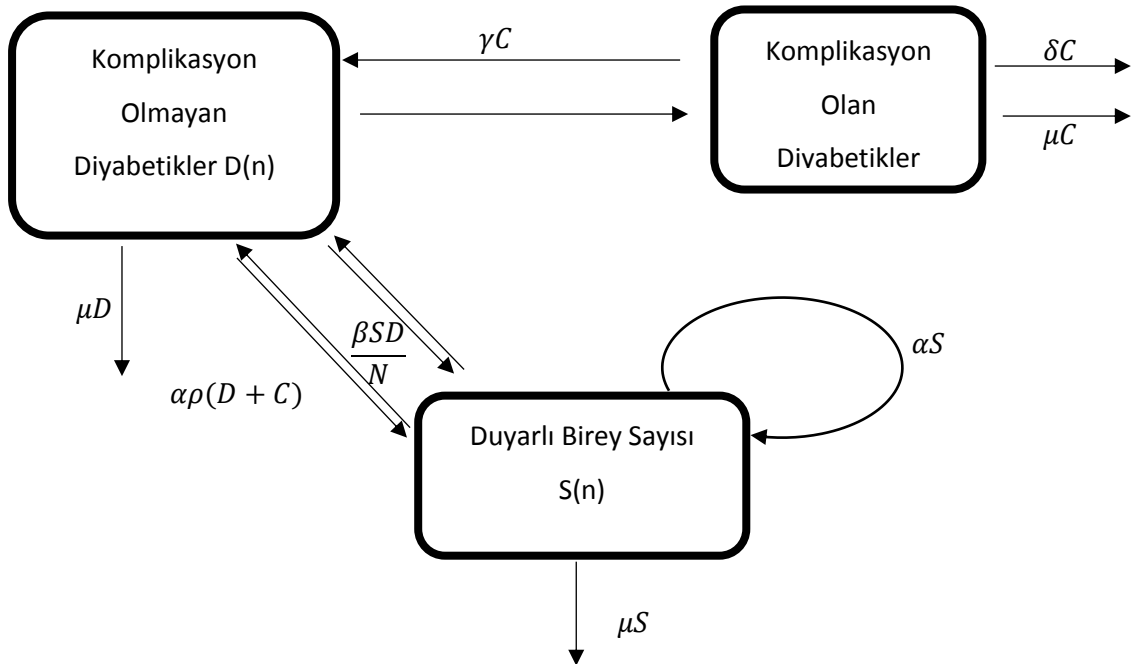


## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, Boutoyeb vd (2004), Hill vd (2013), Segre ve, Rosado (2009), Ackerman vd (1969), Stahl ve Johansson (2009), Widyaningsih vd (2018), Mahata vd (2016) modelleri incelenerek yeni bir duyarlı diyabet komplikasyon (SDC) modeli oluşturulmuştur. Bu modellerin incelenmesinin ardından Widyaningsih vd (2018) tarafından yapılan çalışmadaki deneysel sonuçlar kullanılmaktadır. Bunun yanı sıra sürekli zaman modeli ileri fark yöntemi ile ayrık zamana ayrıklaştırılıp, deterministik ve stokastik analizi yapılmaktadır.

### 2.1. Duyarlı Diyabet Komplikasyon (SDC) Modeli

2004 yılında Boutoyeb ve arkadaşları, komplikasyon olmayan diyabetikler ( $D$ ) ve komplikasyon olan diyabetikleri ( $C$ ) bulmak için ( $DC$ ) diyabet komplikasyon modelini tanımlamıştır. İnsidans sayısının sabit olmadığı ve genetik ile çevresel faktörleri dikkate alarak Widyaningsih vd. (2018) makalesinde yayınlanmıştır. Bu ( $DC$ ) modeline  $S$  duyarlı yeni birey grubu ile modifiye edilerek  $SDC$  modeli oluşturulmuştur. Bu model duyarlı diyabet komplikasyon modeli ( $SDC$ ) olarak adlandırılmıştır.  $SDC$  modelini oluşturan kinematik şema Şekil 2.1.'de gösterilmektedir.



Şekil 2.1. Duyarlı diyabet komplikasyon ( $SDC$ ) modeline ait kinematik şema

Kinematik şemada duyarlı diyabet bireyleri  $S$  ile komplikasyon olmayan diyabetikler  $D$  ve komplikasyon olan diyabetiklerde  $C$  ile gösterilir. Duyarlı birey grubu nedeniyle  $DC$  modeline duyarlı diyabet komplikasyon modeli ( $SDC$ ) modifiye edilmiştir. İnsidansa neden olan etkileşim oranı  $\beta$  ile gösterilir, çevresel faktörler nedeniyle meydana gelen olay sayısı  $\beta SD / N$  olur. Diyabet geçiren her bireyin komplikasyon olmadığı bilinir böylece  $D$  kompartmanındaki birey sayıları  $\beta SD / N$  kadar artmaktadır.  $S$  kompartmanında ise birey sayısı azalmaktadır.  $S$  kompartmanında doğal ölüm oranı  $D$  ve  $C$  kompartmanındaki doğal ölüm oranına eşittir. Bu nedenle  $S$  kompartmanında  $\mu S$  azalmaktadır. Sağlıklı bireylerin de sağlıklı bir çocuğu olduğunu varsayarsak, diyabetlilerde genetik bozukluğuna sahip olan çocukları vardır, ancak yine de sağlıklı bir çocuk sahibi olma olasılığı da olabilir. Genetik bozukluğun doğum oranı  $\rho$  ile doğum oranı ise  $\alpha$  ile gösterilir. Sağlıklı bireylerin doğum sayısı  $\alpha S + \alpha (1 - \rho) (D + C)$  ile genetik bozukluğuna sahip olan bireylerin doğum sayısı  $\alpha \rho (D + C)$  ile gösterilir. Bu kompartımanların birliği bir bölgede ( $N$ ) yaşayan insan sayısını temsil eder. Sağlıklı bireylerin doğumu  $S$  kompartımanındaki birey sayısını arttırırken, genetik bozukluğu olan bireylerin doğumu  $D$  kompartmanındaki birey sayısını da arttırır.  $SDC$  modelindeki popülasyon  $S, D$  ve  $C$  olmak üzere üç kompartımanlı fark denklem sistemi;

$$S(n+1) = S(n) + h \left( \begin{array}{c} \underbrace{\frac{\alpha S(n) + \alpha(1-\rho)(D(n) + C(n))}{\text{doğum}}}_{\text{doğum oranı}} \\ \underbrace{\frac{\beta S(n)D(n)}{N}}_{\text{çevresel faktörler nedeniyle meydana gelen olay sayısı}} - \underbrace{\frac{\mu S(n)}{\text{ölüm}}}_{\text{ölüm oranı}} \end{array} \right) \quad (2.1)$$

$$D(n+1) = D(n) + h \left( \begin{array}{c} \underbrace{\frac{\beta S(n)D(n)}{N}}_{\text{çevresel faktörler nedeniyle meydana gelen olay sayısı}} + \underbrace{\frac{\alpha \rho (D(n) + C(n))}{\text{genetik bozukluğuna sahip olan bireylerin doğum}}}_{\text{genetik bozukluğuna sahip olan bireylerin doğum sayısı}} \\ - \underbrace{\frac{(\lambda + \mu)D(n)}{\text{Komplikasyonların ortaya çıkma oranı ve ölüm oranı}}}_{\text{Komplikasyonların ortaya çıkma oranı ve ölüm oranı}} + \underbrace{\frac{\gamma C(n)}{\text{Komplikasyonların iyileşme oranı}}}_{\text{Komplikasyonların iyileşme oranı}} \end{array} \right) \quad (2.2)$$

$$C(n+1) = C(n) + h \left( \underbrace{\lambda D(n)}_{\text{Komplikasyonların ortaya çıkma oranı}} - \underbrace{(\gamma + \delta + \mu)C(n)}_{\text{engelli olma oranı ve ölüm oranı}} \right) \quad (2.3)$$

ileri fark yöntemiyle elde edilmektedir. Modelin başlangıç koşulları  $S(0) > 0, D(0) > 0, C(0) > 0$  ve  $h = 0.01$  şeklinde ifade edilmektedir. Burada  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho > 0$  ve  $0 \leq \rho \leq 1$  sırasıyla parametreleri ile elde edilen verilere ve bu verilere uygun sonuçlara dayanmaktadır. Bu parametrelerin anlamı ve aldığı değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.1. Duyarlı diyabet komplikasyon (SDC) modelinin parametre değerleri

Parametreler	Açıklamalar	Değerler
$\gamma$	Komplikasyonların iyileşme oranı	0.37141
$\alpha$	Doğum oranı	0.01623
$\delta$	Komplikasyona bağlı ölüm oranı	0.0068
$\lambda$	Komplikasyonların ortaya çıkma oranı	0.67758
$\mu$	Ölüm oranı	0.00764
$\rho$	Doğumdaki genetik bozukluğu	0.077
$\beta$	Etkileşim oranı	0.16263

## 2.2. Duyarlı Diyabet Komplikasyon (SDC) Modelinin Deterministik Analizi

Diyabetes mellitus (şeker hastalığı) olarak tıp dilinde bilinen şeker hastalığı ömür boyu devam eden ve yeterli derecede pankreasta insülin salgılayamamasından kaynaklanan kronik bir hastalıktır. Bu bölümde şeker hastalığının doğum sırasındaki genetik hastalığı incelenmektedir. Genetik bozukluğundan kaynaklanan doğum oranlarının ortaya çıkmaması için kinematik şemaya göre parametreler sıfırdan büyük varsayılacaktır. Bu durumda ortaya çıkan duyarlı diyabet modeline ait sürekli zamandaki denklem sistemi

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \alpha S + \alpha(1 - \rho)(D + C) - \frac{\beta SD}{N} - \mu S \\ \frac{dD}{dt} &= \frac{\beta SD}{N} + \alpha \rho(D + C) - (\lambda + \mu)D + \gamma C \\ \frac{dC}{dt} &= \lambda D - (\gamma + \delta + \mu)C \end{aligned} \quad (2.4)$$

şeklindedir.

(2.4) denklem sistemine Euler yöntemini kullanılarak

$$\begin{aligned} S(n+1) &= S(n) + h \left( \alpha S(n) + \alpha(1-\rho)(D(n) + C(n)) - \frac{\beta S(n)D(n)}{N} - \mu S(n) \right) \\ D(n+1) &= D(n) + h \left( \frac{\beta S(n)D(n)}{N} + \alpha \rho (D(n) + C(n)) - (\lambda + \mu)D(n) + \gamma C(n) \right) \\ C(n+1) &= C(n) + h(\lambda D(n) - (\gamma + \delta + \mu)C(n)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

elde edilir ve (2.4) denklem sisteminin başlangıç koşulları

$$S(0) = 289.8, \quad D(0) = 9.65, \quad C(0) = 11.05, \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilir (Widyaningsih vd., 2018).

### 2.2.1. Duyarlı Diyabet Komplikasyon (SDC) Modelinin Çözümlerinin Pozitifliği ve Sınırlılığı

Bu bölümde (2.4) sisteminin (2.6) başlangıç şartlarına sahip olan çözümlerinin pozitif ve sınırlı olduğunu kanıtlayalım.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \alpha \tilde{S} + \alpha(1-\rho)(\tilde{D} + \tilde{C}) - \frac{\beta \tilde{S}\tilde{D}}{N} - \mu \tilde{S} \\ \frac{dD}{dt} &= \frac{\beta \tilde{S}\tilde{D}}{N} + \alpha \rho (\tilde{D} + \tilde{C}) - (\lambda + \mu)\tilde{D} + \gamma \tilde{C} \\ \frac{dC}{dt} &= \lambda \tilde{D} - (\gamma + \delta + \mu)\tilde{C} \end{aligned}$$

Bu modelin tüm denklemleri toplanarak  $N(n)$  taşıyıcı komplikasyon oluşturularak çözümler ve aşağıdaki denklemle hesaplanır:

$$\tilde{S}(t) + \tilde{D}(t) + \tilde{C}(t) = N \quad (2.7)$$

Denklem (2.7) 'yi (2.4) sistemi ile ilişkilendirilmiş olması nüfus büyüklüğünü tanıtarak her sınıftaki nüfusu oranı açısından (2.4) sisteminde yazılarak  $S(t) = \frac{\tilde{S}(t)}{N}, D(t) = \frac{\tilde{D}(t)}{N}, C(t) = \frac{\tilde{C}(t)}{N}$  olur. Böylece

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= \alpha S + \alpha(1-\rho)(D + C) - \beta SD - \mu S \\ \dot{D}(t) &= \beta SD + \alpha \rho (D + C) - (\lambda + \mu)D + \gamma C \\ \dot{C}(t) &= \lambda D - (\gamma + \delta + \mu)C \end{aligned} \quad (2.8)$$

Bundan dolayı, sistem (2.8) ile yeni bir sistem tanımlanmaktadır ve bu denklem ile güvenilir bir sayısal şema ile yerine getirilmektedir.

$$S(t) + D(t) + C(n) = 1 \quad (2.9)$$

Micken'in fikirleriyle yola çıkarak türevin ayrıklaştırılmasında negatif olmayan bir fonksiyon  $\psi(h) = h + O(h^2)$  kullanılmaktadır. Sayısal şema için sistem (2.8) ayrıklaştırılarak birinci dereceden geçici olmayan yaklaşımlar tarafından zamansal türevlerin yaklaşıklaştırılmasına dayanılarak elde edilir. Bu nedenle,  $f(t)$  türevlenebilirse,  $\dot{f}(t)$  tarafından yaklaşım gerçekleştirilebilir.

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{f(t+h)-f(t)}{h} + O(h) \quad h \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

$S^n, D^n, C^n$  ile sırasıyla  $S(nh), D(nh), C(nh)$  yaklaşımları  $n = 0, 1, 2, \dots$  ve  $h$  ile zaman adımı gösterilmektedir.  $S^n, D^n, C^n$  dizileri modelin biyolojik doğası ile tutarlı olması için negatif olmamaktadır. (2.8) sistemini çözmek için sayısal şema, Micken'in tekniğinden yararlanılarak uygun bir şekilde elde edilmektedir. Böylece, sistem (2.8) için şema aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \frac{S(n+1)-S(n)}{h} &= \alpha S^n + \alpha(1-\rho)(D^n + C^n) - \beta S^{n+1}D^n - \mu S^{n+1} \\ \frac{D(n+1)-D(n)}{h} &= \beta S^{n+1}D^n + \alpha\rho(D^n + C^n) - (\lambda + \mu)D^{n+1} + \gamma C^n \\ \frac{C(n+1)-C(n)}{h} &= \lambda D^{n+1} - \gamma C^n - \delta C^n - \mu C^{n+1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

elde edilen bu sistemde kullanılan yaklaşımlar ve  $n \rightarrow \infty$ ,  $\dot{S} + \dot{D} + \dot{C} = 0$  toplam nüfus sabittir. Dolayısıyla sistem (2.11) taraf tarafa toplarsak,

$$S^{n+1} + D^{n+1} + C^{n+1} = \frac{(1+\alpha h)(S^n + D^n + C^n) - \delta C^n}{1+h\mu} \quad (2.12)$$

elde edilir ve buradan  $\delta C^n$  ihmal edelim ve oluşan yeni denklem

$$S^{n+1} + D^{n+1} + C^{n+1} \geq \frac{(1+\alpha h)(S^n + D^n + C^n)}{1+h\mu} \quad (2.13)$$

buradan,  $\alpha = \mu$  olursa tüm  $n \geq 0$  için  $S^n + D^n + C^n = 1$  ise o zaman  $n \geq 0$  için  $S^{n+1} + D^{n+1} + C^{n+1} = 1$ 'dir ve sistemin pozitifliği ve sınırlılığı vardır.

### 2.2.2. Duyarlı Diyabet Komplikasyon (SDC) Modelinin Denge Noktaları

Sistemin denge noktaları bulmak için solundaki değerleri sıfıra eşitlenerek çözülmesi ile bulunmaktadır.

$$\begin{aligned}
0 &= S(n) + h \left( \alpha S(n) + \alpha(1 - \rho)(D(n) + C(n)) - \frac{\beta S(n)D(n)}{N} - \mu S(n) \right) \\
0 &= D(n) + h \left( \frac{\beta S(n)D(n)}{N} + \alpha \rho(D(n) + C(n)) - (\lambda + \mu)D(n) + \gamma C(n) \right) \\
0 &= C(n) + h(\lambda D(n) - (\gamma + \delta + \mu)C(n))
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Burada (2.14) modelin tüm denklemleri toplanarak  $N(n)$  taşıyıcı komplikasyon oluşturalım.

$$N(n+1) = N(n) + \alpha N(n) - \mu N(n) - \delta C(n) \leq (1 + \alpha - \mu)N(n) \tag{2.15}$$

Eşitliğinden  $\dot{N}(n+1) \leq N_0 (1 + \alpha - \mu)^n$  elde edilir ve  $\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{N}(n) = 0$  olup tek bir dengeye sahiptir. Sistemi (2.14) hastalık denge noktası  $E^0$  ile belirtilip buradan  $E^0(0,0,0)$  tek bir denge noktasına sahiptir.

### 2.2.3. Duyarlı Diyabet Komplikasyon (SDC) Modelinin Temel Üreme Sayısı ( $R_0$ )

Temel üreme sayısı olan  $R_0$ , duyarlı bir popülasyonda tek bir enfekte birey tarafından üretilen ikincil enfeksiyon sayısı bulaşıcı dönemin beklenen süresi olarak tanımlanmaktadır. Duyarlı diyabet komplikasyon (SDC) modelinde ise temel üreme sayısı ( $R_0$ ), şeker hücreleri tarafından üretilen yeni hücre sayısı olarak elde edilmektedir. Matris yöntemini kullanarak (2.5) sistemin temel üreme sayısını elde ediyoruz. (2.5) sistemi  $E^0(0,0,0)$  denge noktasına sahiptir.  $x = (S, D)^T$  olsun. (2.5) sistemi

$$x' = F(x) - V(x) \tag{2.16}$$

şeklinde verilsin. Burada

$$F(x) \begin{bmatrix} -\alpha \rho(D(n) + C(n)) \\ \alpha \rho(D(n) + C(n)) \end{bmatrix}$$

ve

$$V(x) \begin{bmatrix} -S(n) - \alpha S(n) - \alpha(D(n) + C(n)) + \frac{\beta S(n)D(n)}{N} + \mu S(n) \\ -D(n) + (\lambda + \mu)D(n) - \gamma C(n) - \frac{\beta S(n)D(n)}{N} \end{bmatrix}$$

olmak üzere  $E^0(S_0, D_0, C_0) = (0,0,0)$  hastalısız denge noktasında  $F(x)$  ve  $V(x)$  matrislerinin jacobian matrisi,

$$DF(E^0) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha\rho \\ 0 & \alpha\rho \end{bmatrix}, DV(E^0) = \begin{bmatrix} -1 - \alpha + \mu + \frac{\beta D}{n} & -\alpha + \frac{\beta S}{N} \\ \frac{\beta D}{N} & -1 + \lambda + \mu \end{bmatrix}$$

için

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha\rho \\ 0 & \alpha\rho \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} -1 - \alpha + \mu & -\alpha \\ 0 & -1 + \lambda + \mu \end{bmatrix}$$

$G = FV^{-1}$  yeni nesil matrisin yarıçapı ile verilir( Van den Driessche,2017).

$$R_0 = (FV^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha\rho \\ 0 & \alpha\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu - \alpha - 1} & \frac{\alpha}{(\mu - \alpha - 1)(\mu + \lambda - 1)} \\ 0 & \frac{1}{\lambda + \mu - 1} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

temel artış sayısı olan  $R_0 = \frac{\alpha\rho}{\mu + \lambda - 1}$  olarak bulunur (Ma, Zhou ve Cao, 2013).

#### 2.2.4. Duyarlı Diyabet Komplikasyon (SDC) Modelinin Global Kararlılığı

Bu bölümde hastaliksız dengenin global kararlılığını inceleyeceğiz.  $E^0$  (0,0,0) bir denge olduğunu gösterir.  $S, D, C$  bileşenleri sıfır olduğu için hastaliksız denge denir. Hastaliksız denge  $E^0$ 'nin kararlılığı aşağıdaki teoremdedir.

**Teorem 2.1.** Model (2.5)'nin  $E^0$ 'daki hastaliksız denge noktası  $R_0 < 1$  ise global asimptotik kararlıdır ve eğer  $R_0 > 1$ ,  $E^0$  da kararsızdır.

**İspat 2.1.** Model (2.5)  $E^0$  dengesindeki lineerleştirilmiş matrisi,

$$H = \begin{pmatrix} 1 + \alpha - \mu & \alpha(1 - \rho) & \alpha(1 - \rho) \\ 0 & 1 + \alpha\rho - \lambda - \mu & \alpha\rho + \gamma \\ 0 & \lambda & 1 - \gamma - \delta - \mu \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

burada,  $A = \alpha - \mu, B = \alpha(1 - \rho), C = \alpha\rho - \lambda - \mu, D = \alpha\rho + \gamma, E = \gamma + \delta + \mu$   $H$  matrisinde yerine yazarak basit hale getirelim. Elde edilen bu matrisin özdeğerleri,  $\theta_1 = 1 - A, \theta_2 = \frac{C}{2} - \frac{E}{2} - \frac{(C^2 + 2CE + E^2 + 4D\lambda)^{\frac{1}{2}}}{2} + 1, \theta_3 = \frac{C}{2} - \frac{E}{2} + \frac{(C^2 + 2CE + E^2 + 4D\lambda)^{\frac{1}{2}}}{2} + 1$  bulunur. Bu nedenle,  $R_0 < 1$  için  $|\theta_i| = 1, 2, 3$  özdeğerleri  $E^0$  hastaliksız denge noktasında global asimptotik kararlıdır ve  $R_0 > 1$  'de ise için  $E^0$  hastaliksız denge noktası için kararsızdır.

**Teorem 2.2.** Modelin denge noktası  $E^0$  için

- i.  $R_0 < 1$  ise global asimptotik kararlıdır.

ii.  $R_0 > 1$  için kararsızdır.

**İspat 2.2.** (i)  $H$  matrisini  $E^0$  'daki jacobian matrisi verilerek karakteristik denklemi

$$\theta^3 + a_3\theta^2 + a_2\theta + a_1 = 0$$

için

$$\begin{aligned} a_3 &= A - C + E - 3 < 0, \\ a_2 &= 3 + 2C - 2E - 2A - AC + AE - CE - \lambda D > 0 \\ a_1 &= -1 + E - C + CE + \lambda D + A - AE + AC - ACE - AD\lambda > 0 \end{aligned}$$

Bu kübik denkleminin Jury Teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} 1 + a_3 + a_2 + a_1 &= 1 + A - C + E - 3 + 3 + 2C - 2E - 2A - AC + AE - CE - \lambda D - 1 \\ &\quad + E - C + CE + \lambda D + A - AE + AC - ACE - AD\lambda > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 + a_3 - a_2 - 3a_1 &= 3 + A - C + E - 3 - (3 + 2C - 2E - 2A - AC + AE - CE - \lambda D) \\ &\quad - 3(-1 + E - C + CE + \lambda D + A - AE + AC - ACE - AD\lambda) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - a_3 + a_2 - a_1 &= 1 - (A - C + E - 3) + 3 + 2C - 2E - 2A - AC + AE - CE - \lambda D \\ &\quad - (-1 + E - C + CE + \lambda D + A - AE + AC - ACE - AD\lambda) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + a_3a_1 - a_2 - a_1^2 &= 1 \\ &\quad + (A - C + E - 3)(-1 + E - C + CE + \lambda D + A - AE + AC - ACE \\ &\quad - AD\lambda) - (3 + 2C - 2E - 2A - AC + AE - CE - \lambda D) \\ &\quad - (-1 + E - C + CE + \lambda D + A - AE + AC - ACE - AD\lambda)^2 > 0 \end{aligned}$$

Bu nedenle, model  $R_0 < 1$  ise  $E^0$  civarında global asimptotik kararlıdır (Sandefur, 1990).

### 2.3. Duyarlı Diyabet Komplikasyonunun (SDC) Rastgele Etkiler Altında Modellenmesi

(2.5) deterministik modelinin rastgele etkiler altındaki davranışlarını incelemek için  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri rastgele değişkenler olarak alınmaktadır. Bu parametrelerde kesikli düzgün dağılım, binom dağılımı, geometrik dağılım, hipergeometrik dağılım, poisson



dağılımı ve sürekli düzgün dağılımına ait rastgele efektler yardımıyla SDC için rastgele modeller oluşturulacaktır.

### 2.3.1. Kesikli Düzgün Dağılıma Sahip Rastgele Etkiler

$T$  kesikli düzgün dağılıma sahip bir rastgele değişken olsun.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  kesikli düzgün dağılıma sahip rastgele değişkeninin

$$X = \mu + \sigma T$$

şeklinde gösterilmektedir. Bu özellikten yararlanarak yeni  $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*, \lambda^*, \mu^*, \rho^*$  rastgele parametreleri  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7$  bağımsız ve standart düzgün dağılımına sahip rastgele değişkenler ile aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \alpha + d_1 \xi_1 & \delta^* &= \delta + d_4 \xi_4 \\ \beta^* &= \beta + d_2 \xi_2 & \lambda^* &= \lambda + d_5 \xi_5 & \rho^* &= \rho + d_7 \xi_7 \\ \gamma^* &= \gamma + d_3 \xi_3 & \mu^* &= \mu + d_6 \xi_6 \end{aligned}$$

Burada  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7$  katsayıları  $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*, \lambda^*, \mu^*, \rho^*$  rastgele parametrelerinin standart sapmalarını gösteren sabitlerdir.  $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*, \lambda^*, \mu^*, \rho^*$  rastgele parametrelerinin beklenen değerleri  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametrelerinin değerlerine eşit olacak şekilde belirlenebilir.

Bu yöntemin temelinde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametrelerinin değerlerine  $d_i \xi_i$ ,  $i = \overline{1,7}$  rastgele etkilerinin eklenmesiyle  $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*, \lambda^*, \mu^*, \rho^*$  rastgele parametrelerin elde edilmektedir.  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7$  sabitlerinin değerleri verilerden elde edilen bilgiler ile belirlenmektedir.

$X$  rastgele değişkeni için varyasyon katsayısı

$$CV = 100 \times \frac{std(X)}{E(X)}$$

ile ifade edilmektedir. Olasılık dağılımları için rastgele etkiler %5'lik katsayısına sahipse bu rastgele değişken için

$$CV = 100 \times \frac{std(X)}{E(X)} = \%5 \Rightarrow std(X) = \frac{E(X)}{20}$$

olur.  $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*, \lambda^*, \mu^*, \rho^*$  rastgele parametrelerinin standart sapmaları  $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7$  parametrelerin beklenen değerlerinin %5'idir. Burada parametreler şu şekilde hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\alpha}{20} = \frac{0.01623}{20} = 0.0008115 \\ d_2 &= \frac{\beta}{20} = \frac{0.16263}{20} = 0.0081315 \\ d_3 &= \frac{\gamma}{20} = \frac{0.37141}{20} = 0.0185705 \\ d_4 &= \frac{\delta}{20} = \frac{0.0068}{20} = 0.00034 \\ d_5 &= \frac{\lambda}{20} = \frac{0.67758}{20} = 0.033879 \\ d_6 &= \frac{\mu}{20} = \frac{0.00764}{20} = 0.000382 \\ d_7 &= \frac{\rho}{20} = \frac{0.077}{20} = 0.00385 \end{aligned}$$

Burada,  $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*, \lambda^*, \mu^*, \rho^*$  rastgele parametre değerleri

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \alpha + d_1 \xi_1 = 0.01623 + 0.0008115 \xi_1 \\ \beta^* &= \beta + d_2 \xi_2 = 0.16263 + 0.0081315 \xi_2 \\ \gamma^* &= \gamma + d_3 \xi_3 = 0.37141 + 0.0185705 \xi_3 \\ \delta^* &= \delta + d_4 \xi_4 = 0.0068 + 0.00034 \xi_4 \\ \lambda^* &= \lambda + d_5 \xi_5 = 0.67758 + 0.033879 \xi_5 \\ \mu^* &= \mu + d_6 \xi_6 = 0.00764 + 0.000382 \xi_6 \\ \rho^* &= \rho + d_7 \xi_7 = 0.077 + 0.00385 \xi_7 \end{aligned}$$

elde edilen rastgele parametreler kullanılarak (2.5) denklem sisteminin kesikli düzgün dağılımına sahip yeni denklem sistemi

$$\begin{aligned} S(n+1) &= S(n) + h \left( \alpha^* S(n) + \alpha^* (1 - \rho^*) (D(n) + C(n)) - \frac{\beta^* S(n) D(n)}{N} - \mu^* S(n) \right) \\ D(n+1) &= D(n) + h \left( \frac{\beta^* S(n) D(n)}{N} + \alpha^* \rho^* (D(n) + C(n)) - (\lambda^* + \mu^*) D(n) + \gamma^* C(n) \right) \\ C(n+1) &= C(n) + h (\lambda^* D(n) - (\gamma^* + \delta^* + \mu^*) C(n)) \end{aligned} \tag{2.19}$$

şeklinde ifade edilir.

(2.19) denklem sistemine rastgele parametre değerleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
S(n+1) &= S(n) + h \left( \begin{aligned} &(0.01623 + 0.0008115\xi_1)S(n) \\ &+ (0.01623 + 0.0008115\xi_1) \\ &(1 - 0.077 + 0.00385\xi_7)(D(n) + C(n)) \\ &\frac{0.16263 + 0.0081315\xi_2S(n)D(n)}{N} - 0.00764 \\ &+ 0.000382\xi_6S(n) \end{aligned} \right) \\
D(n+1) &= D(n) + h \left( \begin{aligned} &\frac{0.16263 + 0.0081315\xi_2S(n)D(n)}{N} \\ &+ (0.01623 + 0.0008115\xi_1)(0.077 + 0.00385\xi_7) \\ &(D(n) + C(n)) \\ &-(0.67758 + 0.033879\xi_5 + 0.00764 + 0.000382\xi_6)D(n) \\ &+ 0.37141 + 0.0185705\xi_3C(n) \end{aligned} \right) \\
C(n+1) &= C(n) + h \left( \begin{aligned} &(0.67758 + 0.033879\xi_5)D(n) \\ &- (0.37141 + 0.0185705\xi_3 + 0.0068 + 0.00034\xi_4)C(n) \\ &+ 0.00764 + 0.000382\xi_6 \end{aligned} \right)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

(2.20) modeliyle duyarlı diyabet modelinin  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri düzgün dağılımına sahip rastgele davranışı modellenmektedir.

### 2.3.2. Binom Dağılımına Sahip Rastgele Etkiler

$T$  standart binom dağılıma sahip bir rastgele değişken olsun.  $X \sim \text{Binornd}(k, p)$  binom dağılıma sahip rastgele değişkeni.  $X \sim \text{Binornd}(k = 6, p = 0.1667)$  rastgele değişkeni ile

$$X = k + pT$$

şeklinde gösterilmektedir. Bu özellikten yararlanarak yeni  $\alpha^{**}, \beta^{**}, \gamma^{**}, \delta^{**}, \lambda^{**}, \mu^{**}, \rho^{**}$  rastgele parametreleri  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$  bağımsız ve standart binom dağılımına sahip rastgele değişkenler ile aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^{**} &= \alpha + d_8 T_1 & \delta^{**} &= \delta + d_{11} T_4 \\
\beta^{**} &= \beta + d_9 T_2 & \lambda^{**} &= \lambda + d_{12} T_5 & \rho^{**} &= \rho + d_{14} T_7 \\
\gamma^{**} &= \gamma + d_{10} T_3 & \mu^{**} &= \mu + d_{13} T_6
\end{aligned}$$

$\alpha^{**}, \beta^{**}, \gamma^{**}, \delta^{**}, \lambda^{**}, \mu^{**}, \rho^{**}$  rastgele parametrelerinin beklenen değerleri  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametrelerinin değerlerine eşit olacak şekilde belirlenebilir.

Bu yöntemin temelinde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametrelerinin değerlerine  $d_i \xi_i$ ,  $i = \overline{8, 14}$  rastgele etkilerinin eklenmesiyle  $\alpha^{**}, \beta^{**}, \gamma^{**}, \delta^{**}, \lambda^{**}, \mu^{**}, \rho^{**}$  rastgele parametrelerin elde

edilmektedir. Bir  $X \sim \text{Binornd}(k, p)$  binom dağılımının rastgele değişkenin beklenen değeri  $E(x) = kp$  olduğu göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}\alpha^{**} &\sim \text{Binornd}(k_1, p_1) \\ \beta^{**} &\sim \text{Binornd}(k_2, p_2) \\ \gamma^{**} &\sim \text{Binornd}(k_3, p_3) \\ \delta^{**} &\sim \text{Binornd}(k_4, p_4) \\ \lambda^{**} &\sim \text{Binornd}(k_5, p_5) \\ \mu^{**} &\sim \text{Binornd}(k_6, p_6) \\ \rho^{**} &\sim \text{Binornd}(k_7, p_7)\end{aligned}$$

olmak üzere binom dağılımına sahip durumda yaklaşık %5'lik katsayısı elde edilmesi gerekmektedir. Bu nedenle  $X \sim \text{Binornd}(k, p)$  rastgele değişkeni için  $\text{Var}(X) = kp(1 - p)$  dikkate alınarak rastgele parametreler

$$\begin{aligned}\alpha^{**} &= \alpha + d_8 T_1 = 0.01623 + 0.0008115 T_1 \\ \beta^{**} &= \beta + d_9 T_2 = 0.16263 + 0.0081315 T_2 \\ \gamma^{**} &= \gamma + d_{10} T_3 = 0.37141 + 0.0185705 T_3 \\ \delta^{**} &= \delta + d_{11} T_4 = 0.0068 + 0.00034 T_4 \\ \lambda^{**} &= \lambda + d_{12} T_5 = 0.67758 + 0.033879 T_5 \\ \mu^{**} &= \mu + d_{13} T_6 = 0.00764 + 0.000382 T_6 \\ \rho^{**} &= \rho + d_{14} T_7 = 0.077 + 0.00385 T_7\end{aligned}$$

elde edilen rastgele parametreler kullanılarak (2.5) denklem sisteminin binom dağılımına sahip yeni denklem sistemi

$$\begin{aligned}S(n+1) &= S(n) + h \left( \frac{\alpha^{**} S(n) + \alpha^{**} (1 - \rho^{**}) (D(n) + C(n)) - \frac{\beta^{**} S(n) D(n)}{N}}{-\mu^{**} S(n)} \right) \\ D(n+1) &= D(n) + h \left( \frac{\frac{\beta^{**} S(n) D(n)}{N} + \alpha^{**} \rho^{**} (D(n) + C(n)) - (\lambda^{**} + \mu^{**}) D(n)}{+\gamma^{**} C(n)} \right) \\ C(n+1) &= C(n) + h (\lambda^{**} D(n) - (\gamma^{**} + \delta^{**} + \mu^{**}) C(n))\end{aligned} \quad (2.21)$$

şeklinde ifade edilir. (2.21) denklem sistemine rastgele parametre değerleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
S(n+1) &= S(n) + h \left( \begin{aligned} &(0.01623 + 0.0008115T_1)S(n) \\ &+ (0.01623 + 0.0008115T_1) \\ &(1 - 0.077 + 0.00385T_7)(D(n) + C(n)) \\ &- \frac{0.16263 + 0.0081315T_2S(n)D(n)}{N} \\ &- (0.00764 + 0.000382T_6)S(n) \end{aligned} \right) \\
D(n+1) &= D(n) + h \left( \begin{aligned} &\frac{0.16263 + 0.0081315T_2S(n)D(n)}{N} \\ &+ (0.01623 + 0.0008115T_1)(0.077 + 0.00385T_7) \left( \frac{D(n)}{+C(n)} \right) \\ &- \left( \frac{0.67758 + 0.033879T_5}{+0.00764 + 0.000382T_6} \right) D(n) \\ &+ 0.37141 + 0.0185705T_3C(n) \end{aligned} \right) \\
C(n+1) &= C(n) + h \left( \begin{aligned} &(0.67758 + 0.033879T_5)D(n) \\ &- (0.37141 + 0.0185705T_3 + 0.0068 + 0.00034T_4 \\ &+ 0.00764 + 0.000382T_6)C(n) \end{aligned} \right)
\end{aligned} \tag{2.22}$$

(2.22) modeliyle duyarlı diyabet modelinin  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri binom dağılımına sahip rastgele davranışı modellenmektedir.

### 2.3.3. Geometrik Dağılımına Sahip Rastgele Etkiler

$T$  standart geometrik dağılıma sahip bir rastgele değişken olsun.  $X \sim \text{Geornd}(p, q)$  geometrik dağılıma sahip rastgele değişkeni  $X \sim \text{Geornd}(p = 0.1, p = 0.9)$  rastgele değişkeni ile

$$X = p + qT$$

şeklinde gösterilmektedir. Bu özellikten yararlanarak yeni  $\alpha^{***}, \beta^{***}, \gamma^{***}, \delta^{***}, \lambda^{***}, \mu^{***}, \rho^{***}$  rastgele parametreleri  $T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}$  bağımsız ve standart geometrik dağılımına sahip rastgele değişkenler ile aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^{***} &= \alpha + d_{15}T_8 & \delta^{***} &= \delta + d_{18}T_{11} \\
\beta^{***} &= \beta + d_{16}T_9 & \lambda^{***} &= \lambda + d_{19}T_{12} & \rho^{***} &= \rho + d_{21}T_{14} \\
\gamma^{***} &= \gamma + d_{17}T_{10} & \mu^{***} &= \mu + d_{20}T_{13}
\end{aligned}$$

Bu yöntemin temelinde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametrelerinin değerlerine  $d_i T_i$ ,  $i = \overline{15, 21}$  rastgele etkilerinin eklenmesiyle  $\alpha^{***}, \beta^{***}, \gamma^{***}, \delta^{***}, \lambda^{***}, \mu^{***}, \rho^{***}$  rastgele parametrelerin

elde edilmektedir. Bir  $X \sim \text{Geornd}(p, q)$  geometrik dağılımının rastgele değişkenin beklenen değeri  $E(x) = \frac{1}{p}$  olduğu göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}\alpha^{***} &\sim \text{Geornd}(p_1, q_1) \\ \beta^{***} &\sim \text{Geornd}(p_2, q_2) \\ \gamma^{***} &\sim \text{Geornd}(p_3, q_3) \\ \delta^{***} &\sim \text{Geornd}(p_4, q_4) \\ \lambda^{***} &\sim \text{Geornd}(p_5, q_5) \\ \mu^{***} &\sim \text{Geornd}(p_6, q_6) \\ \rho^{***} &\sim \text{Geornd}(p_7, q_7)\end{aligned}$$

olmak üzere geometrik dağılımına sahip durumda yaklaşık %5'lik katsayısı elde edilmesi gerekmektedir. Bu nedenle  $X \sim \text{Geornd}(p, q)$  rastgele değişkeni için  $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$  dikkate alınarak rastgele parametreler

$$\begin{aligned}\alpha^{***} &= \alpha + d_{15}T_8 = 0.01623 + 0.0008115T_8 \\ \beta^{***} &= \beta + d_{16}T_9 = 0.16263 + 0.0081315T_9 \\ \gamma^{***} &= \gamma + d_{17}T_{10} = 0.37141 + 0.0185705T_{10} \\ \delta^{***} &= \delta + d_{18}T_{11} = 0.0068 + 0.00034T_{11} \\ \lambda^{***} &= \lambda + d_{19}T_{12} = 0.67758 + 0.033879T_{12} \\ \mu^{***} &= \mu + d_{20}T_{13} = 0.00764 + 0.000382T_{13} \\ \rho^{***} &= \rho + d_{21}T_{14} = 0.077 + 0.00385T_{14}\end{aligned}$$

elde edilen rastgele parametreler kullanılarak (2.5) denklem sisteminin geometrik dağılımına sahip yeni denklem sistemi

$$\begin{aligned}S(n+1) &= S(n) + h \left( \frac{\alpha^{***}S(n) + \alpha^{***}(1 - \rho^{***})(D(n) + C(n))}{N} - \frac{\beta^{***}S(n)D(n)}{N} - \mu^{***}S(n) \right) \\ D(n+1) &= D(n) + h \left( \frac{\beta^{***}S(n)D(n)}{N} + \alpha^{***}\rho^{***}(D(n) + C(n)) - (\lambda^{***} + \mu^{***})D(n) + \gamma^{***}C(n) \right) \\ C(n+1) &= C(n) + h(\lambda^{***}D(n) - (\gamma^{***} + \delta^{***} + \mu^{***})C(n))\end{aligned} \tag{2.23}$$

şeklinde ifade edilir. (2.23) denklem sistemine rastgele parametre değerleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
S(n+1) &= S(n) + h \left( \begin{aligned} &(0.01623 + 0.0008115T_8)S(n) \\ &+ (0.01623 + 0.0008115T_8)(1 - 0.077 + 0.00385T_{14}) \left( \frac{D(n)}{+C(n)} \right) \\ &- \frac{0.16263 + 0.0081315T_9S(n)D(n)}{N} \\ &- (0.00764 + 0.000382T_{13})S(n) \end{aligned} \right) \\
D(n+1) &= D(n) + h \left( \begin{aligned} &\frac{0.16263 + 0.0081315T_9S(n)D(n)}{N} \\ &+ (0.01623 + 0.0008115T_8)(0.077 + 0.00385T_{14}) \left( \frac{D(n)}{+C(n)} \right) \\ &- \left( \frac{0.67758 + 0.033879T_{12} + 0.00764}{+0.000382T_{13}} \right) D(n) \\ &+ 0.37141 + 0.0185705T_{10}C(n) \end{aligned} \right) \\
C(n+1) &= C(n) + h \left( \begin{aligned} &(0.67758 + 0.033879T_{12})D(n) \\ &- (0.37141 + 0.0185705T_{10} + 0.0068 + 0.00034T_{11}) \\ &+ 0.00764 + 0.000382T_{13})C(n) \end{aligned} \right)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

(2.24) modeliyle duyarlı diyabet modelinin  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri geometrik dağılımına sahip rastgele davranışı modellenmektedir.

#### 2.3.4. Hipergeometrik Dağılımına Sahip Rastgele Etkiler

$T$  standart hipergeometrik dağılıma sahip bir rastgele değişken olsun.  $X \sim \text{Hygeornd}(n, M/N)$  hipergeometrik dağılıma sahip rastgele değişkeni  $X \sim \text{hygeornd}(1000, 40/50)$  rastgele değişkeni ile

$$X = M + NT$$

şeklinde gösterilmektedir.

Bu özellikten yararlanarak yeni  $\alpha^{****}, \beta^{****}, \gamma^{****}, \delta^{****}, \lambda^{****}, \mu^{****}, \rho^{****}$  rastgele parametreleri  $T_{15}, T_{16}, T_{17}, T_{18}, T_{19}, T_{20}, T_{21}$  bağımsız ve standart hipergeometrik dağılımına sahip rastgele değişkenler ile aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^{****} &= \alpha + d_{22}T_{15} & \delta^{****} &= \delta + d_{25}T_{18} \\
\beta^{****} &= \beta + d_{23}T_{16} & \lambda^{****} &= \lambda + d_{26}T_{19} & \rho^{****} &= \rho + d_{28}T_{21} \\
\gamma^{****} &= \gamma + d_{24}T_{17} & \mu^{****} &= \mu + d_{27}T_{20}
\end{aligned}$$

Bu yöntemin temelinde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametrelerinin değerlerine  $d_i T_i$ ,  $i = \overline{22, 28}$  rastgele etkilerinin eklenmesiyle  $\alpha^{****}, \beta^{****}, \gamma^{****}, \delta^{****}, \lambda^{****}, \mu^{****}, \rho^{****}$  rastgele

parametrelerin elde edilmektedir. Bir  $X \sim \text{hypgernd}(n, M/N)$  hipergeometrik dağılımının rastgele değişkenin beklenen değeri  $E(x) = \frac{nM}{N}$  olduğu göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}\alpha^{****} &\sim \text{hypgeornd}(n_1, M_1/N_1) \\ \beta^{****} &\sim \text{hypgeornd}(n_2, M_2/N_2) \\ \gamma^{****} &\sim \text{hypgeornd}(n_3, M_3/N_3) \\ \delta^{****} &\sim \text{hypgeornd}(n_4, M_4/N_4) \\ \lambda^{****} &\sim \text{hypgeornd}(n_5, M_5/N_5) \\ \mu^{****} &\sim \text{hypgeornd}(n_6, M_6/N_6) \\ \rho^{****} &\sim \text{hypgeornd}(n_7, M_7/N_7)\end{aligned}$$

olmak üzere hipergeometrik dağılımına sahip durumda yaklaşık %5'lik katsayısı elde edilmesi gerekmektedir. Bu nedenle  $X \sim \text{hypgeornd}(n, M/N)$  rastgele değişkeni için  $\text{Var}(X) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}$  dikkate alınarak rastgele parametreler

$$\begin{aligned}\alpha^{****} &= +d_{22}T_{15} = 0.01623 + 0.0008115T_{15} \\ \beta^{****} &= \beta + d_{23}T_{16} = 0.16263 + 0.0081315T_{16} \\ \gamma^{****} &= \gamma + d_{24}T_{17} = 0.37141 + 0.0185705T_{17} \\ \delta^{****} &= \delta + d_{25}T_{18} = 0.0068 + 0.00034T_{18} \\ \lambda^{****} &= \lambda + d_{26}T_{19} = 0.67758 + 0.033879T_{19} \\ \mu^{****} &= \mu + d_{27}T_{20} = 0.00764 + 0.000382T_{20} \\ \rho^{****} &= \rho + d_{28}T_{21} = 0.077 + 0.00385T_{21}\end{aligned}$$

elde edilen rastgele parametreler kullanılarak (2.5) denklem sisteminin hipergeometrik dağılımına sahip yeni denklem sistemi

$$\begin{aligned}S(n+1) &= S(n) + h \left( \alpha^{****} S(n) + \alpha^{****} (1 - \rho^{****}) (D(n) + C(n)) - \frac{\beta^{****} S(n) D(n)}{N} - \mu^{****} S(n) \right) \\ D(n+1) &= D(n) + h \left( \frac{\beta^{****} S(n) D(n)}{N} + \alpha^{****} \rho^{****} (D(n) + C(n)) - (\lambda^{****} + \mu^{****}) D(n) + \gamma^{****} C(n) \right) \\ C(n+1) &= C(n) + h (\lambda^{****} D(n) - (\gamma^{****} + \delta^{****} + \mu^{****}) C(n))\end{aligned}\tag{2.25}$$

şeklinde ifade edilir.

(2.25) denklem sistemine rastgele parametre değerleri yazılırsa,



$$\begin{aligned}
S(n+1) &= S(n) + h \left( \begin{aligned} &(0.01623 + 0.0008115T_{15})S(n) \\ &+ (0.01623 + 0.0008115T_{15}) \\ &(1 - 0.077 + 0.00385T_{21})(D(n) + C(n)) \\ &- \frac{0.16263 + 0.0081315T_{16}S(n)D(n)}{N} - \\ &(0.00764 + 0.000382T_{20})S(n) \end{aligned} \right) \\
D(n+1) &= D(n) + h \left( \begin{aligned} &\frac{0.16263 + 0.0081315T_{16}S(n)D(n)}{N} \\ &+ (0.01623 + 0.0008115T_{15}) \\ &(0.077 + 0.00385T_{21})(D(n) + C(n)) \\ &- (0.67758 + 0.033879T_{19} + 0.00764 + 0.000382T_{20})D(n) \\ &+ 0.37141 + 0.0185705T_{17}C(n) \end{aligned} \right) \\
C(n+1) &= C(n) + h \left( \begin{aligned} &(0.67758 + 0.033879T_{19})D(n) \\ &- (0.37141 + 0.0185705T_{17} + 0.0068 + 0.00034T_{18}) \\ &+ 0.00764 + 0.000382T_{20})C(n) \end{aligned} \right)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

(2.26) modeliyle duyarlı diyabet modelinin  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri hipergeometrik dağılımına sahip rastgele davranışı modellenmektedir.

### 2.3.5. Poisson Dağılımına Sahip Rastgele Etkiler

$T$  standart poisson dağılıma sahip bir rastgele değişken olsun.  $X \sim \text{poissrnd}(\lambda)$  poisson dağılıma sahip rastgele değişkeni  $X \sim \text{poissrnd}(\lambda = 2)$  rastgele değişkeni ile

$$X = p + qT$$

şeklinde gösterilmektedir.

Bu özellikten yararlanarak yeni  $\alpha^{****}, \beta^{****}, \gamma^{****}, \delta^{****}, \lambda^{****}, \mu^{****}, \rho^{****}$  rastgele parametreleri  $T_{22}, T_{23}, T_{24}, T_{25}, T_{26}, T_{27}, T_{28}$  bağımsız ve standart geometrik dağılımına sahip rastgele değişkenler ile aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^{****} &= \alpha + d_{29}T_{22} & \delta^{****} &= \delta + d_{32}T_{25} \\
\beta^{****} &= \beta + d_{30}T_{23} & \lambda^{****} &= \lambda + d_{33}T_{26} & \rho^{****} &= \rho + d_{35}T_{28} \\
\gamma^{****} &= \gamma + d_{31}T_{24} & \mu^{****} &= \mu + d_{34}T_{27}
\end{aligned}$$

Bu yöntemin temelinde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametrelerinin değerlerine  $d_i T_i$ ,  $i = \overline{29, 35}$  rastgele etkilerinin eklenmesiyle  $\alpha^{****}, \beta^{****}, \gamma^{****}, \delta^{****}, \lambda^{****}, \mu^{****}, \rho^{****}$  rastgele

parametrelerin elde edilmektedir. Bir  $X \sim \text{poissrnd}(\lambda)$  poisson dağılımının rastgele değişkenin beklenen değeri  $E(x) = \lambda$  olduğu göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}\alpha^{*****} &\sim \text{poissrnd}(\lambda_1) \\ \beta^{*****} &\sim \text{poissrnd}(\lambda_2) \\ \gamma^{*****} &\sim \text{poissrnd}(\lambda_3) \\ \delta^{*****} &\sim \text{poissrnd}(\lambda_4) \\ \lambda^{*****} &\sim \text{poissrnd}(\lambda_5) \\ \mu^{*****} &\sim \text{poissrnd}(\lambda_6) \\ \rho^{*****} &\sim \text{poissrnd}(\lambda_7)\end{aligned}$$

olmak üzere poisson dağılımına sahip durumda yaklaşık %5'lik katsayısı elde edilmesi gerekmektedir. Bu nedenle  $X \sim \text{poissrnd}(\lambda)$  rastgele değişkeni için  $\text{Var}(X) = \lambda$  dikkate alınarak rastgele parametreler

$$\begin{aligned}\alpha^{*****} &= \alpha + d_{22}T_{22} = 0.01623 + 0.0008115T_{22} \\ \beta^{*****} &= \beta + d_{23}T_{23} = 0.16263 + 0.0081315T_{23} \\ \gamma^{*****} &= \gamma + d_{24}T_{24} = 0.37141 + 0.0185705T_{24} \\ \delta^{*****} &= \delta + d_{25}T_{25} = 0.0068 + 0.00034T_{25} \\ \lambda^{*****} &= \lambda + d_{26}T_{26} = 0.67758 + 0.033879T_{26} \\ \mu^{*****} &= \mu + d_{27}T_{27} = 0.00764 + 0.000382T_{27} \\ \rho^{*****} &= \rho + d_{28}T_{28} = 0.077 + 0.00385T_{28}\end{aligned}$$

elde edilen rastgele parametreler kullanılarak (2.5) denklem sisteminin poisson dağılımına sahip yeni denklem sistemi

$$\begin{aligned}S(n+1) &= S(n) + h \left( \alpha^{*****}S(n) + \alpha^{*****}(1 - \rho^{*****})(D(n) + C(n)) - \frac{\beta^{*****}S(n)D(n)}{N} - \mu^{*****}S(n) \right) \\ D(n+1) &= D(n) + h \left( \frac{\beta^{*****}S(n)D(n)}{N} + \alpha^{*****}\rho^{*****}(D(n) + C(n)) - (\lambda^{*****} + \mu^{*****})D(n) + \gamma^{*****}C(n) \right) \\ C(n+1) &= C(n) + h(\lambda^{*****}D(n) - (\gamma^{*****} + \delta^{*****} + \mu^{*****})C(n))\end{aligned}\tag{2.27}$$

şeklinde ifade edilir. (2.27) denklem sistemine rastgele parametre değerleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
S(n+1) &= S(n) + h \left( \frac{(0.01623 + 0.0008115T_{22})S(n) + (0.01623 + 0.0008115T_{22})}{(1 - 0.077 + 0.00385T_{28})(D(n) + C(n))} \right. \\
&\quad \left. - \frac{0.16263 + 0.0081315T_{23}S(n)D(n)}{N} - (0.00764 + 0.000382T_{27})S(n) \right) \\
D(n+1) &= D(n) + h \left( \frac{0.16263 + 0.0081315T_{23}S(n)D(n)}{N} + (0.01623 + 0.0008115T_{22}) \right. \\
&\quad \left. (0.077 + 0.00385T_{28})(D(n) + C(n)) \right. \\
&\quad \left. - (0.67758 + 0.033879T_{26} + 0.00764 + 0.000382T_{27})D(n) \right. \\
&\quad \left. + 0.37141 + 0.0185705T_{24}C(n) \right) \\
C(n+1) &= C(n) + h \left( \frac{(0.67758 + 0.033879T_{26})D(n)}{-(0.37141 + 0.0185705T_{24} + 0.0068 + 0.00034T_{25})} \right. \\
&\quad \left. + 0.00764 + 0.000382T_{27})C(n) \right)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

(2.28) modeliyle duyarlı diyabet modelinin  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri poisson dağılımına sahip rastgele davranışı modellenmektedir.

### 2.3.6. Sürekli Düzgün Dağılıma Sahip Rastgele Etkiler

$T$  sürekli düzgün dağılıma sahip bir rastgele değişken olsun.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  sürekli düzgün dağılıma sahip rastgele değişkeninin

$$X = \mu + \sigma T$$

şeklinde gösterilmektedir.

Bu özellikten yararlanarak yeni  $\alpha^{*****}, \beta^{*****}, \gamma^{*****}, \delta^{*****}, \lambda^{*****}, \mu^{*****}, \rho^{*****}$  rastgele parametreleri  $\xi_8, \xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{14}$  bağımsız ve sürekli düzgün dağılımına sahip rastgele değişkenler ile aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha^{*****} &= \alpha + d_{29}\xi_8 & \delta^{*****} &= \delta + d_{32}\xi_{11} \\
\beta^{*****} &= \beta + d_{30}\xi_9 & \lambda^{*****} &= \lambda + d_{33}\xi_{12} & \rho^{*****} &= \rho + d_{35}\xi_{14} \\
\gamma^{*****} &= \gamma + d_{31}\xi_{10} & \mu^{*****} &= \mu + d_{34}\xi_{13}
\end{aligned}$$

Burada  $d_{29}, d_{30}, d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{34}, d_{35}$  katsayıları  $\alpha^{*****}, \beta^{*****}, \gamma^{*****}, \delta^{*****}, \lambda^{*****}, \mu^{*****}, \rho^{*****}$  rastgele parametrelerinin standart sapmalarını gösteren sabitlerdir.  $\alpha^{*****}, \beta^{*****}, \gamma^{*****}, \delta^{*****}, \lambda^{*****}, \mu^{*****}, \rho^{*****}$  rastgele parametrelerinin beklenen değerleri  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametrelerinin değerlerine eşit olacak şekilde belirlenebilir.

Bu yöntemin temelinde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametrelerinin değerlerine  $d_i \xi_i$ ,  $i = \overline{29, 35}$  rastgele etkilerinin eklenmesiyle  $\alpha^{*****}, \beta^{*****}, \gamma^{*****}, \delta^{*****}, \lambda^{*****}, \mu^{*****}, \rho^{*****}$

rastgele parametrelerin elde edilmektedir.  $d_{29}, d_{30}, d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{34}, d_{35}$  sabitlerinin değerleri verilerden elde edilen bilgiler ile belirlenmektedir.

$X$  rastgele değişkeni için varyasyon katsayısı

$$CV = 100 \times \frac{std(X)}{E(X)}$$

ile ifade edilmektedir. Olasılık dağılımları için rastgele etkiler %5'lik katsayısına sahipse bu rastgele değişken için

$$CV = 100 \times \frac{std(X)}{E(X)} = \%5 \Rightarrow std(X) = \frac{E(X)}{20}$$

olur.  $\alpha^{*****}, \beta^{*****}, \gamma^{*****}, \delta^{*****}, \lambda^{*****}, \mu^{*****}, \rho^{*****}$  rastgele parametrelerinin standart sapmaları  $d_{29}, d_{30}, d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{34}, d_{35}$  parametrelerin beklenen değerlerinin %5'idir.

Burada parametreler şu şekilde hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned} d_{29} &= \frac{\alpha}{20} = \frac{0.01623}{20} = 0.0008115 \\ d_{30} &= \frac{\beta}{20} = \frac{0.16263}{20} = 0.0081315 \\ d_{31} &= \frac{\gamma}{20} = \frac{0.37141}{20} = 0.0185705 \\ d_{32} &= \frac{\delta}{20} = \frac{0.0068}{20} = 0.00034 \\ d_{33} &= \frac{\lambda}{20} = \frac{0.67758}{20} = 0.033879 \\ d_{34} &= \frac{\mu}{20} = \frac{0.00764}{20} = 0.000382 \\ d_{35} &= \frac{\rho}{20} = \frac{0.077}{20} = 0.00385 \end{aligned}$$

Burada,  $\alpha^{*****}, \beta^{*****}, \gamma^{*****}, \delta^{*****}, \lambda^{*****}, \mu^{*****}, \rho^{*****}$  rastgele parametre değerleri

$$\begin{aligned} \alpha^{*****} &= \alpha + d_{29}\xi_8 = 0.01623 + 0.0008115\xi_8 \\ \beta^{*****} &= \beta + d_{30}\xi_9 = 0.16263 + 0.0081315\xi_9 \\ \gamma^{*****} &= \gamma + d_{31}\xi_{10} = 0.37141 + 0.0185705\xi_{10} \\ \delta^{*****} &= \delta + d_{32}\xi_{11} = 0.0068 + 0.00034\xi_{11} \\ \lambda^{*****} &= \lambda + d_{33}\xi_{12} = 0.67758 + 0.033879\xi_{12} \\ \mu^{*****} &= \mu + d_{34}\xi_{13} = 0.00764 + 0.000382\xi_{13} \\ \rho^{*****} &= \rho + d_{35}\xi_{14} = 0.077 + 0.00385\xi_{14} \end{aligned}$$

elde edilen rastgele parametreler kullanılarak (2.5) denklem sisteminin sürekli düzgün dağılımına sahip yeni denklem sistemi

$$\begin{aligned}
S(n+1) &= S(n) + h \left( \alpha^{*****} S(n) + \alpha^{*****} (1 - \rho^{*****}) (D(n) + C(n)) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\beta^{*****} S(n) D(n)}{N} - \mu^{*****} S(n) \right) \\
D(n+1) &= D(n) + h \left( \frac{\beta^{*****} S(n) D(n)}{N} + \alpha^{*****} \rho^{*****} (D(n) + C(n)) \right. \\
&\quad \left. - (\lambda^{*****} + \mu^{*****}) D(n) + \gamma^{*****} C(n) \right) \\
C(n+1) &= C(n) + h (\lambda^{*****} D(n) - (\gamma^{*****} + \delta^{*****} + \mu^{*****}) C(n))
\end{aligned} \tag{2.29}$$

şeklinde ifade edilir. (2.29) denklem sistemine rastgele parametre değerleri yazılırsa,

$$\begin{aligned}
S(n+1) &= S(n) + h \left( \frac{(0.01623 + 0.0008115\xi_8) S(n) + (0.01623 + 0.0008115\xi_8) (1 - 0.077 + 0.00385\xi_{14}) (D(n) + C(n))}{0.16263 + 0.0081315\xi_9 S(n) D(n)} - 0.00764 \right. \\
&\quad \left. + 0.000382\xi_{13} S(n) \right) \\
D(n+1) &= D(n) + h \left( \frac{0.16263 + 0.0081315\xi_9 S(n) D(n)}{N} + (0.01623 + 0.0008115\xi_8) (0.077 + 0.00385\xi_{14}) (D(n) + C(n)) \right. \\
&\quad \left. - (0.67758 + 0.033879\xi_{12} + 0.00764 + 0.000382\xi_{13}) D(n) + 0.37141 + 0.0185705\xi_{10} C(n) \right) \\
C(n+1) &= C(n) + h \left( - (0.67758 + 0.033879\xi_{12}) D(n) - (0.37141 + 0.0185705\xi_{10} + 0.0068 + 0.00034\xi_{11}) \right. \\
&\quad \left. + 0.00764 + 0.000382\xi_{12}) C(n) \right)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

(2.30) modeliyle duyarlı diyabet modelinin  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri sürekli düzgün dağılımına sahip rastgele davranışı modellenmektedir.

#### 2.4. Duyarlı Diyabet Komplikasyonunun (SDC) Stokastik Etkiler Altında

##### Modellenmesi

Duyarlı diyabet komplikasyonuna ait deterministik modelinin (2.5) rastgele etkileri altında analizi için stokastik modeller kullanılmaktadır. Modelin başlangıç koşulları ve lineer olmayan sistem için farklı durumlar rastgele davranışları denklemde temsil edilmektedir. Bu durumda ortaya çıkan rastgele yapı parametrelerin rastgele olarak incelenmesini temsil edilemez. Elde edilen SDC model denklemine stokastik gürültü terimi eklenerek stokastik fark denklemi elde edilmektedir. Rastgele etkiler altında oluşturulan (2.20) - (2.30) arasındaki modellerinin sonuçlarının stokastik modeller ile karşılaştırılarak

SDC deterministik modeline stokastik etkileri eklenerek stokastik fark denklem sistemi elde edilmektedir.

$$x_{n+1} = F(n, x_n) + G(x, x_n)\xi_{n+1}, \quad n \in N \quad (2.31)$$

ile verilen ayrık zamanlı stokastik denklemi kullanılarak (2.5) modeli için aşağıdaki gibi stokastik fark denklem sistemi yazılabilir.

$$\begin{aligned} S(n+1) &= S(n) + h \left( \begin{aligned} &\alpha S(n) + \alpha(1-\rho)(D(n) + C(n)) - \frac{\beta S(n)D(n)}{N} \\ &- \mu S(n) + \sigma_1 S(n)\xi_{1_{n+1}} \end{aligned} \right) \\ D(n+1) &= D(n) + h \left( \begin{aligned} &\frac{\beta S(n)D(n)}{N} + \alpha \rho (D(n) + C(n)) - (\lambda + \mu)D(n) \\ &+ \gamma C(n) + \sigma_2 D(n)\xi_{2_{n+1}} \end{aligned} \right) \\ C(n+1) &= C(n) + h(\lambda D(n) - (\gamma + \delta + \mu)C(n) + \sigma_3 C(n)\xi_{3_{n+1}}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

SDC stokastik modelinin başlangıç şartları  $S(0) = 289.8, D(0) = 9.65, C(0) = 11.05$  dir. (2.32) denklem sisteminin  $\xi_{i_{n+1}}$   $i = \overline{1,3}$  ile Winner sürecini  $\sigma_i, i = \overline{1,3}$  doğal filtremelerle uyumlu katsayıları verilmektedir. (2.20) - (2.30) denklem sistemlerinin parametrelerinin rastgele davranışları için rastgele etki terimleri parametrelere eklenirken (2.32) denklem sistemine ise rastgele davranışları için stokastik etki terimleri eklenmektedir. Parametreler farklı dağılımlar için %5'lik rastgele etkiler altında incelenmiştir. Stokastik modelde de rastgele etkinin %5 olduğu kabul edilip  $\sigma_i$  doğal filtremelerle uyumlu katsayıları 0.05 olarak alınmaktadır. Burada (2.31) stokastik fark denklemlerin  $G(x, x_n)$  fonksiyonlarının  $\sigma_i \times x_n = 0.05 \times x_n$  olarak hesaplanmaktadır. Duyarlı diyabet komplikasyon modelinin tüm değişkenlerinde stokastik gürültüde eklenen doğal filtremelerle uyumlu katsayıları  $\sigma_1 S(n), \sigma_2 D(n), \sigma_3 C(n)$  şeklinde ifade edilmektedir.

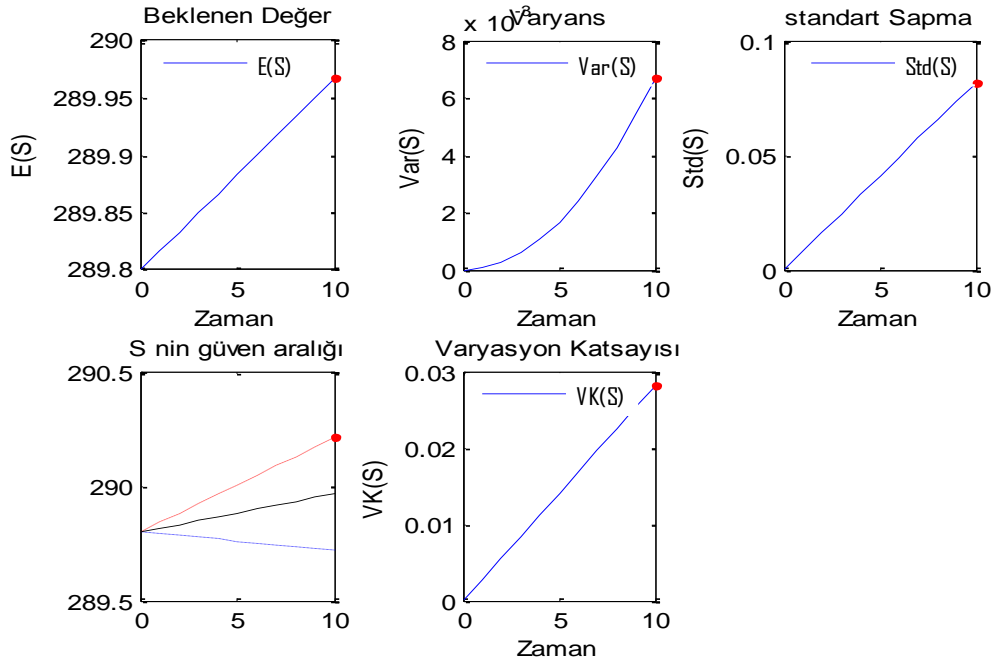
Modelin sayısal sonuçlarını incelemek için daha önce verilen bilgilere göre Stokastik Euler-Maruyama (1.30), Stokastik Milstein (1.31) ve Stokastik Runge-Kutta (1.33) yöntemleri kullanılarak stokastik fark denklemleri için yaklaşımlar elde edilmektedir.

## 2.5. Model Sonuçları

Duyarlı diyabet komplikasyon (SDC) modelinin, Düzgün (Tekdüze) dağılıma sahip (2.20), Binom dağılımına sahip (2.22), Geomterik dağılımına sahip (2.24), Hipergeometrik dağılımına sahip (2.26), Poisson dağılımına sahip (2.28) ve Düzgün dağılımına sahip (2.30) sonuçları MATLAB paket programı yardımıyla incelenmektedir.

### 2.5.1. Kesikli Düzgün (Tekdüze) Parametreler ile Sayısal Karakteristikleri

(2.5) modelinin  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametrelili kesikli düzgün dağılımına sahip rastgele değişken olması durumunda, MATLAB kodu olan  $random('uniform', 0, 10)$  ile  $K = 10$  ve  $10^5$  simülasyondan elde edilen olasılık karakteristikler aşağıda verilmiştir.



Şekil 2. 2.  $S(n)$  duyarlı birey sayısının rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0, 10]$ ) değişkenliğin arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.2 ve Şekil 2.2).

Tablo 2.2. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının beklenen değeri ekstremum değerler ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(S(n))$	289.8	0	290	10

Beklenen değerin  $n = 10$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) beklenen değer için  $E(S(10)) = 290$  değeri elde edilmiştir.

Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Ekstreum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.3 ve Şekil 2.2).

Tablo 2.3.Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının varyansının ekstreum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(S(n))$	0	0	0.006694	10

Diyabeti  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(S(10)) = 0.006694$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.2). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstreum değerler görülmektedir (Tablo 2.4).

Tablo 2.4. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının standart sapmanın ekstreum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(S(n))$	0	0	0.08182	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(S(10)) = 0.08182$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $S(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.2).

Tanım itibarıyla varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times std(S(n))/E(S(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (2.5) modelinin kurulumu için rastgele



$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $S(n)$  değişkeninde daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.5)

Tablo 2.5. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının varyasyon katsayısının ekstremum değerler ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(S(n))$	0	0	0.02822	10

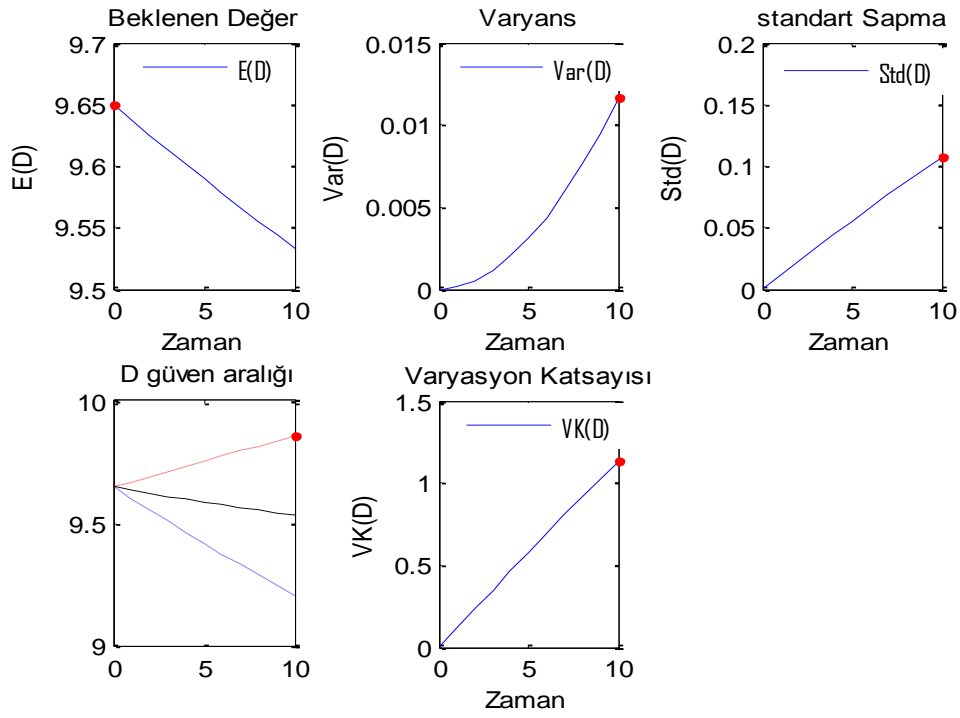
Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $S(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.0002822 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 2.1). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(S(n)) - 3 \cdot std(S(n)), E(S(n)) + 3 \cdot std(S(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Kesikli düzgün dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.6).

Tablo 2.6. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(S(n))$	289.8	10	290.2	10

$S(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(S(10)) \in (289.8, 290.2)$ . (2.5) modeli bu değer için beklentinin  $GA(S(10)) = 290.2$  yani yaklaşık %2.902 olduğunu ve beklenen yaklaşık diyabet oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla  $(289.8, 290.2)$  aralığında olduğunu belirtmektedir.



Şekil 2.3.  $D(n)$  Komplike olmayan rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0,10]$ ) değişkenliğin azaldığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 1.6 ve Şekil 2.3).

Tablo 2.7. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(D(n))$	9.533	10	9.65	0

Beklenen değerin  $n = 0$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 0$ ) beklenen değer için  $E(D(0)) = 9.65$  değeri elde edilmiştir. Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi  $n \in ([0,10])$  arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.8 ve Şekil 2.3 ).

Tablo 2. 8. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan varyansının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(D(n))$	0	0	0.01163	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(D(10)) = 0.01163$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.3). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo 2.9).

Tablo 2.9. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(D(n))$	0	0	0.1078	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(D(10)) = 0.1078$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $D(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.3).

Tanım itibarıyla varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation CV)  $100 \times std(D(n))/E(D(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (2.5) modelinin kurulumu için rastgele  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $D(n)$

değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.10).

Tablo 2.10. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(D(n))$	0	0	1.131	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $D(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.01131 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

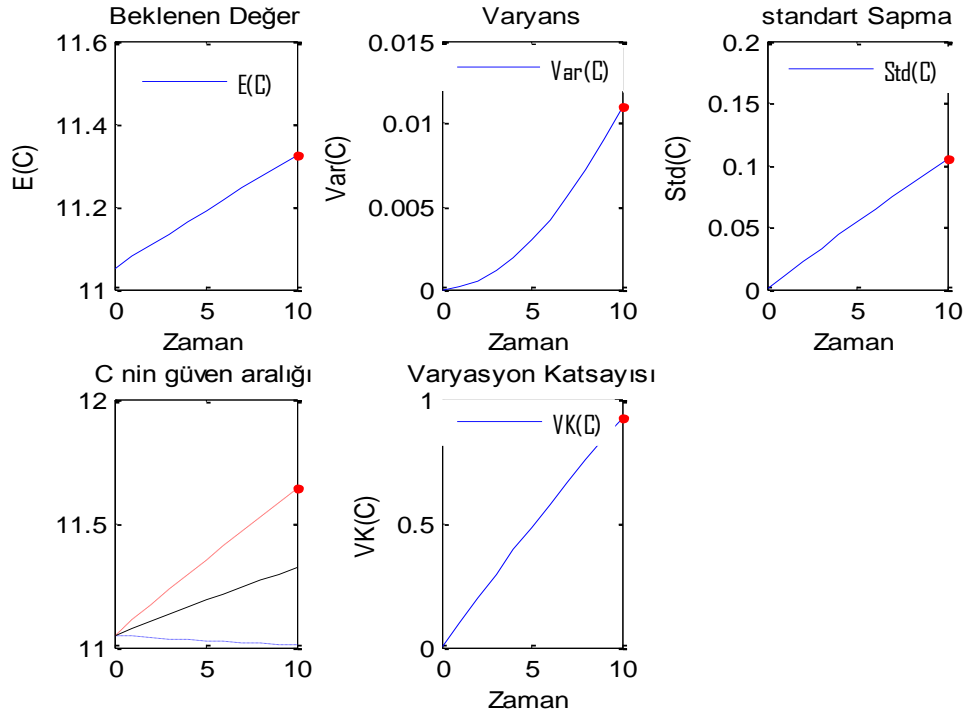
(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir. (Şekil 2.3). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(D(n)) - 3.std(D(n)), E(D(n)) + 3.std(D(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Kesikli düzgün dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.11).

Tablo 2.11. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(D(n))$	9.21	10	9.857	10

$D(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(D(0)) \in (9.21, 9.857)$ .

(2.5) modeli bu değer için beklentinin  $GA(D(0)) = 9.857$  yani yaklaşık %0.0985 olduğunu ve beklenen yaklaşık diyabet oranının  $n = 0$  anında yaklaşık %99 olasılıkla (9.21, 9.857) aralığında olduğunu belirtmektedir.



Şekil 2.4.  $C(n)$  komplikasyon oranının rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0,10]$ ) değişkenliğin arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.12 ve Şekil 2.4).

Tablo 2.12. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(C(n))$	11.05	0	11.32	10

Beklenen değerin  $n = 10$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) beklenen değer için  $E(C(10)) = 11.32$  değeri elde edilmiştir.

Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.13 ve Şekil 2.4).

Tablo 2.13. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(C(n))$	0	0	0.01101	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(C(10)) = 0.01101$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.4). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo 2.14).

Tablo 2.14. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(C(n))$	0	0	0.1049	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(C(10)) = 0.1049$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $C(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.4).

Tanım itibarıyla varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times std(C(n))/E(C(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (2.5) modelinin kurulumu için rastgele  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $C(n)$

değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.15).

Tablo 2.15. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(C(n))$	0	0	0.9266	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $C(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.009266 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir. (Şekil 2.4).Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(C(n)) - 3 \cdot std(C(n)), E(C(n)) + 3 \cdot std(C(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Kesikli düzgün dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.16).

Tablo 2.16. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

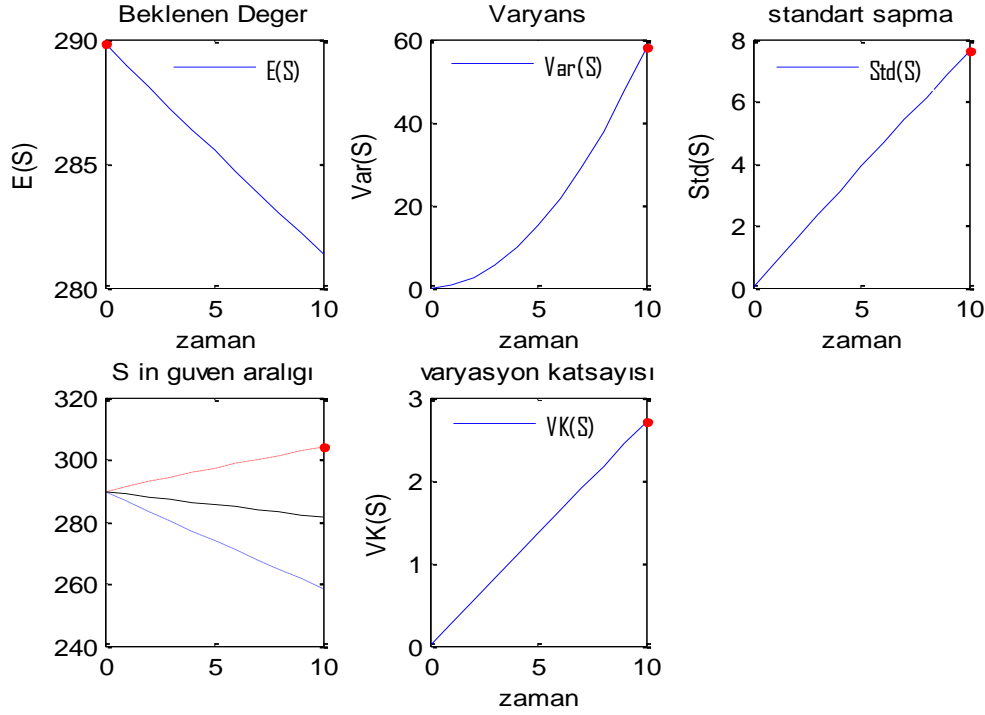
Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(C(n))$	11.05	10	11.64	10

$C(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalık aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $E(C(10)) \in (11.05, 11.64)$ .

(2.5) modeli bu değer için beklentinin  $E(C(10)) = 11.64$  yani yaklaşık %0.1164 olduğunu ve beklenen yaklaşık diyabet oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla (11.05,11.64) aralığında olduğunu belirtmektedir.

### 2.5.2. Binom Parametreler ile Sayısal Karakteristikleri

(2.5) ile tanımlanan rastgele fark denklem sisteminde,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$ ,  $k = 6$  parametreleri Binom dağılımına sahip rastgele değişken olması durumunda,  $K = 10$  ve  $10^5$  simülasyondan elde edilen olasılık karakteristikler aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.5. Binom dağılımına sahip  $S(n)$  duyarlı birey sayısının rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0, 10]$ ) değişkenliğin azaldığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.17 ve Şekil 2.5).

Tablo 2.17. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(S(n))$	281.4	10	289.8	0

Beklenen değer  $n = 0$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 0$ ) beklenen değer için  $E(S(0)) = 289.8$  değeri elde edilmiştir.



Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Ekstreum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.18 ve Şekil 2.5 ).

Tablo 2.18. Rastgele  $S(n)$  modelinde varyansının ekstreum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(S(n))$	0	0	58.08	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(S(10)) = 58.08$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.5). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstreum değerler görülmektedir (Tablo 2.19).

Tablo 2.19. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının standart sapmanın ekstreum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(S(n))$	0	0	7.621	10

Diyabet oranının  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(S(10)) = 7.621$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $S(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.5).

Tanım itibarıyla varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times std(S(n))/E(S(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (2.5) modelinin kurulumu için rastgele

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $S(n)$  değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.20).

Tablo 2.20. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(S(n))$	0	0	2.709	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $S(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.027049 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

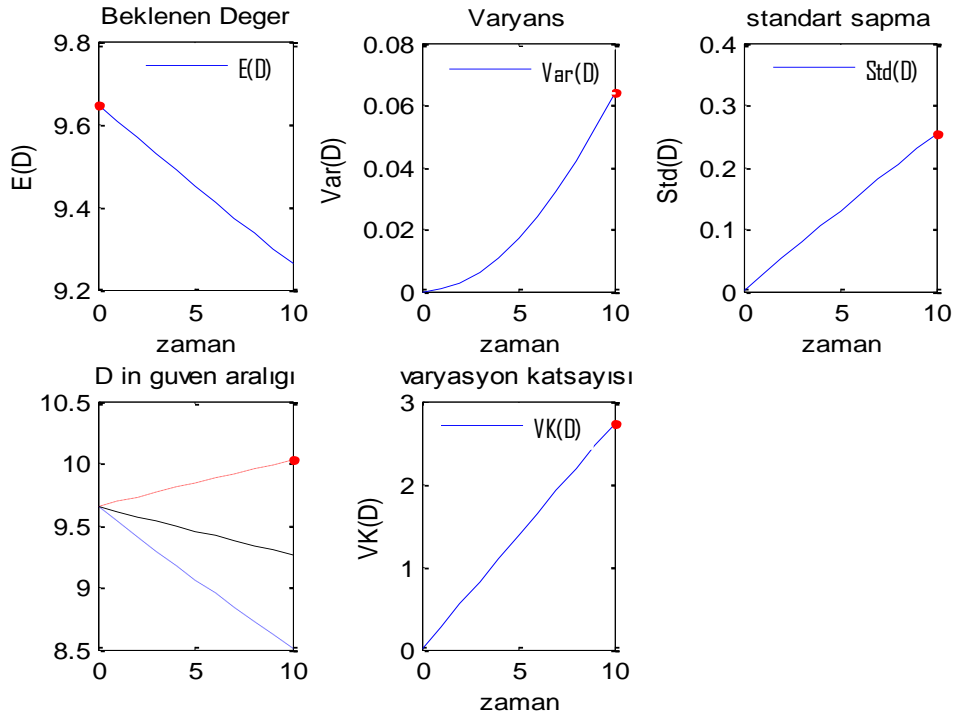
(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir. (Şekil 2.5). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(C(n)) - 3 \cdot std(C(n)), E(C(n)) + 3 \cdot std(C(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Binom dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.21).

Tablo 2.21. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(S(n))$	258.6	10	304.189	10

$S(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(S(10)) \in (258.6, 304.1)$ .

(2.5) modeli bu değer için beklentinin  $GA(S(10)) = 304.189$  yani yaklaşık %3.04189 olduğunu ve beklenen yaklaşık diyabet oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla (258.6,304.1) aralığında olduğunu belirtmektedir.



Şekil 2.6. Binom dağılımına sahip  $D(n)$  komplike olmayan rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0,10]$ ) değişkenliğin azaldığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.22 ve Şekil 2.6).

Tablo 2.22. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(D(n))$	9.267	10	9.65	0

Beklenen değerin  $n = 0$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 0$ ) beklenen değer için  $E(D(0)) = 9.65$  değeri elde edilmiştir.

Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.23 ve Şekil 2.6 ).

Tablo 2.23. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan varyansının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(D(n))$	0	0	0.06418	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(D(10)) = 0.06418$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.6). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo 2.24).

Tablo 2.24. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(D(n))$	0	0	0.02533	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(D(10)) = 0.02533$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $D(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.6).

Tanım itibarıyla varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times std(D(n))/E(D(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (2.5) modelinin kurulumu için rastgele  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $D(n)$

değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.25).

Tablo 2.25. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(D(n))$	0	0	2.734	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $D(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.02734 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

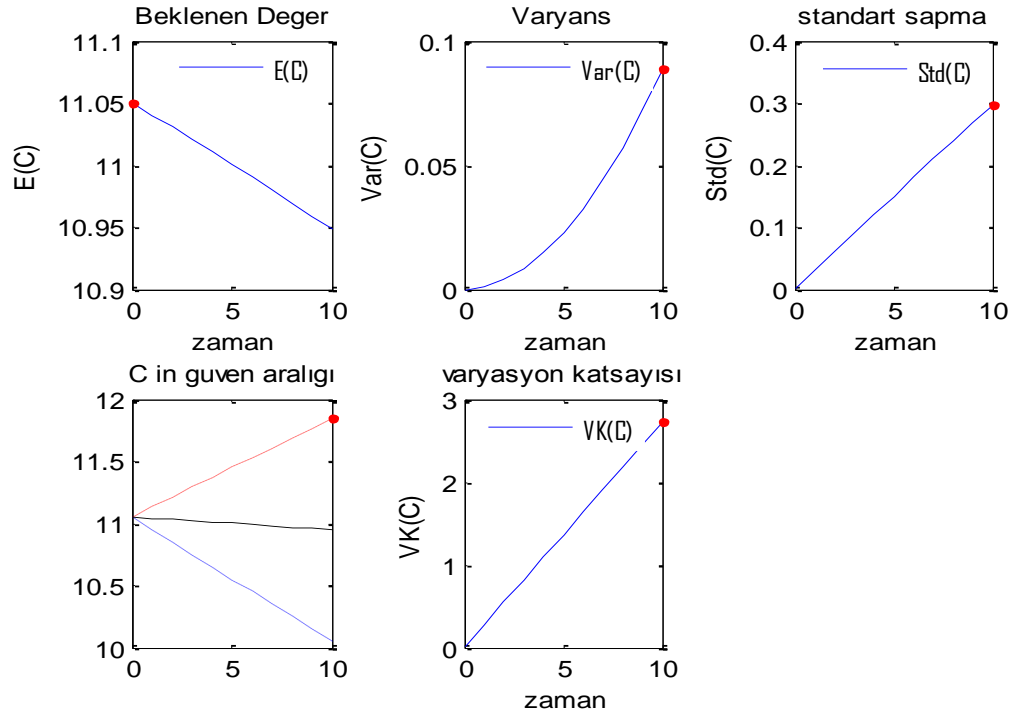
(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 2.6). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(D(n)) - 3 \cdot std(D(n)), E(D(n)) + 3 \cdot std(D(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Binom dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.26).

Tablo 2.26. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(D(n))$	8.507	10	10.03	10

$D(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(D(10)) \in (8.507, 10.03)$ .

(2.5) modeli bu değer için beklentinin  $GA(D(10)) = 10.03$  yani yaklaşık %0.1003 olduğunu ve beklenen yaklaşık diyabet oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla  $(8.507, 9.7258)$  aralığında olduğunu belirtmektedir.



Şekil 2.7. Binom dağılımına sahip  $C(n)$  komplikasyon oranının rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0,10]$ ) değişkenliğin azaldığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.27 ve Şekil 2.7).

Tablo 2.27. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(C(n))$	10.95	10	11.05	0

Beklenen değerin  $n = 0$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak a ( $n = 0$ ) beklenen değer için  $E(C(0)) = 11.05$  değeri elde edilmiştir.

Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.28 ve Şekil 2.7 ).

Tablo 2.28. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(C(n))$	0	0	0.08863	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(C(10)) = 0.08863$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.7). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo 2.29).

Tablo 2.29. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(C(n))$	0	0	0.2977	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(C(10)) = 0.2977$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $C(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.7).

Tanım itibarıyla varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times std(C(n))/E(C(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (2.5) modelinin kurulumu için rastgele  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $C(n)$  değişkenlerinin daha

yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.30).

Tablo 2.30. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(C(n))$	0	0	2.719	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $C(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.02719 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 2.7). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(C(n)) - 3 \cdot std(C(n)), E(C(n)) + 3 \cdot std(C(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Binom dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.31).

Tablo 2.31. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(C(n))$	10.05	0	11.8407	10

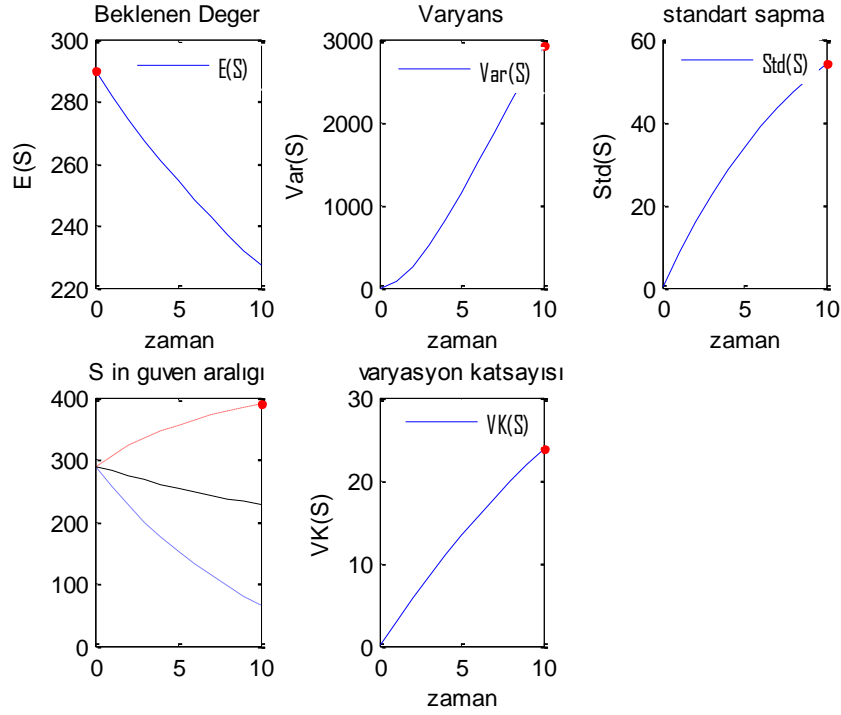
$C(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(C(10)) \in (10.05, 11.84)$ .

(2.5) modeli bu değer için beklentinin  $GA(C(10)) = 11.8407$  yani yaklaşık %0.118407 olduğunu ve beklenen yaklaşık diyabet oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla (10.05,11.84) aralığında olduğunu belirtmektedir.



### 2.5.3. Geometrik Parametreler ile Sayısal Karakteristikleri

(2.5) ile tanımlanan rastgele fark denklem sisteminde,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametrelili geometrik dağılımına sahip rastgele değişken olması durumunda,  $K = 10$  ve  $10^5$  simülasyondan elde edilen olasılık karakteristikler aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.8. Geometrik dağılımına sahip  $S(n)$  duyarlı birey sayısının rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0,10]$ ) değişkenliğin azaldığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.32 ve Şekil 2.8).

Tablo 2.32. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(S(n))$	227.4	10	289.8	0

Beklenen değerin  $n = 0$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde

edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 0$ ) beklenen değer için  $E(S(0)) = 289.8$  değeri elde edilmiştir.

Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi  $n \in [0,10]$  arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.33 ve Şekil 2.8 ).

Tablo 2.33. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(S(n))$	0	0	2930	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(S(10)) = 2930$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.8). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo2.34).

Tablo 2.34. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(S(n))$	0	0	54.13	10

Diyabet oranının  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(S(10)) = 54.13$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $S(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.8).

Tanım itibarıyla varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times std(S(n))/E(S(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (2.5) modelinin kurulumu için rastgele  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $S(n)$  değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.35).

Tablo 2.35. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(S(n))$	0	0	23.82	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $S(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.2382 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

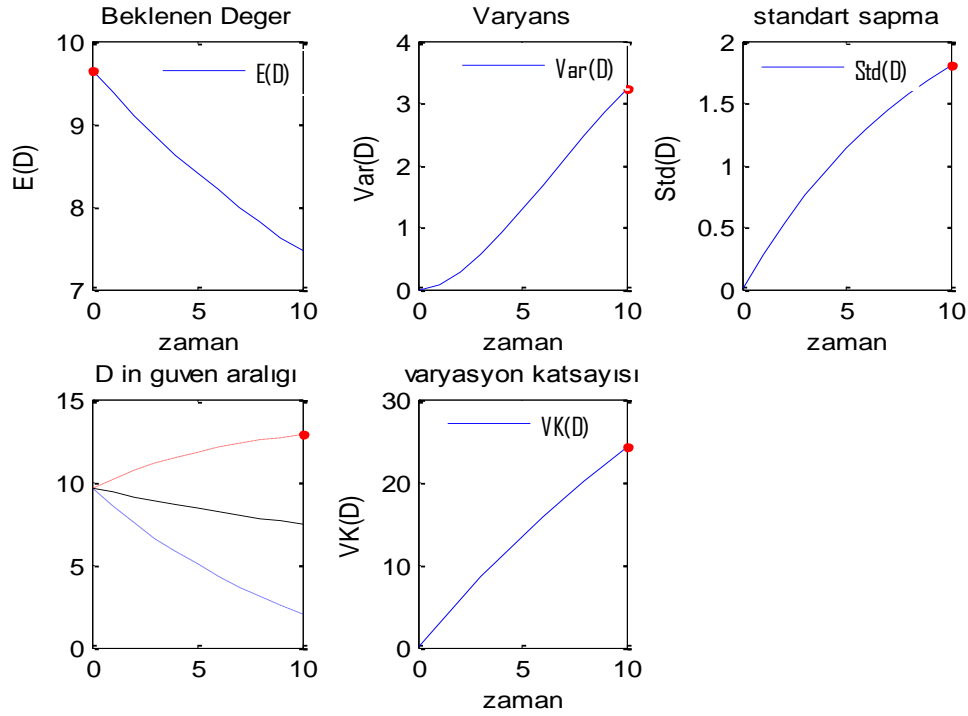
(2.5) modelinin beklenen değerleri için elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 2.8). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(S(n)) - 3 \cdot std(S(n)), E(S(n)) + 3 \cdot std(S(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Geometrik dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.36).

Tablo 2.36. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(S(n))$	66.02	10	389.691	10

$S(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(S(10)) \in (66.02, 389.69)$ .

(2.5) modeli bu değer için beklentinin  $GA(S(10)) = 389.691$  yani yaklaşık %3.89691 olduğunu ve beklenen yaklaşık diyabet oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla  $(66.02, 389.69)$  aralığında olduğunu belirtmektedir.



Şekil 2.9. Geometrik dağılımına sahip  $D(n)$  komplike olmayan rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0, 10]$ ) değişkenliğin azaldığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.37 ve Şekil 2.9).

Tablo 2.37. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(D(n))$	7.458	10	9.65	0

Beklenen değerin  $n = 0$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde

edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 0$ ) beklenen değer için  $E(D(0)) = 9.65$  değeri elde edilmiştir.

Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Uç değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.38 ve Şekil 2.9 ).

Tablo 2. 38. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan varyansının uç değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(D(n))$	0	0	3.241	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(D(10)) = 3.241$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.9). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo 2.39).

Tablo 2.39. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(D(n))$	0	0	1.8	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(D(10)) = 1.8$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $D(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.9).

Tanım itibariyle varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times \text{std}(D(n))/E(D(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (2.5) modelinin kurulumu için rastgele  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $D(n)$  değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.40).

Tablo 2.40. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(D(n))$	0	0	24.14	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $D(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.2414 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

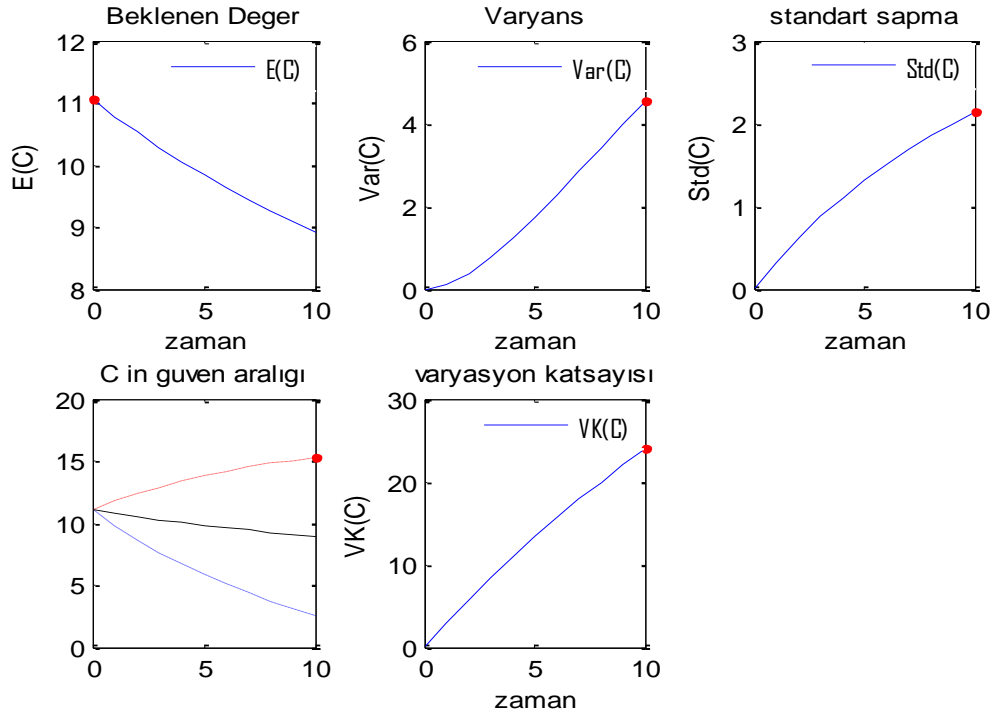
(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 2.9). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(D(n)) - 3 \cdot \text{std}(D(n)), E(D(n)) + 3 \cdot \text{std}(D(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Geometrik dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.41).

Tablo 2.41. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(D(n))$	2.058	0	12.8575	10

$D(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(D(10)) \in (2.058, 12.85)$ . (2.5) modeli bu değer için beklentinin

$GA(D(10)) = 12.8579$  yani yaklaşık %0.128579 olduğunu ve beklenen yaklaşık diyabet oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla  $(2.058, 12.85)$  aralığında olduğunu belirtmektedir.



Şekil 2.10. Geometrik dağılımına sahip  $C(n)$  komplikasyon oranının rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0, 10]$ ) değişkenliğin azaldığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.42 ve Şekil 2.10).

Tablo 2.42. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(C(n))$	8.925	10	11.05	0

Beklenen değerin  $n = 0$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 0$ ) beklenen değer için  $E(C(0)) = 11.05$  değeri elde edilmiştir.

Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.43 ve Şekil 2.10).

Tablo 2.43. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(C(n))$	0	0	4.55665	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(C(10)) = 4.55665$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.10). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo 2.44).

Tablo 2.44. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(C(n))$	0	0	2.13463	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(C(10)) = 2.13463$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $C(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.10).

Tanım itibarıyla varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times std(C(n))/E(C(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (2.5) modelinin kurulumu için rastgele



$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $C(n)$  değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.45).

Tablo 2.45. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(C(n))$	0	0	23.9438	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $C(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.239438 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 2.10). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(C(n)) - 3 \cdot \text{std}(C(n)), E(C(n)) + 3 \cdot \text{std}(C(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Geometrik dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.46).

Tablo 2.46. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının güven aralığındaki ekstremum, değerleri ve zamanları

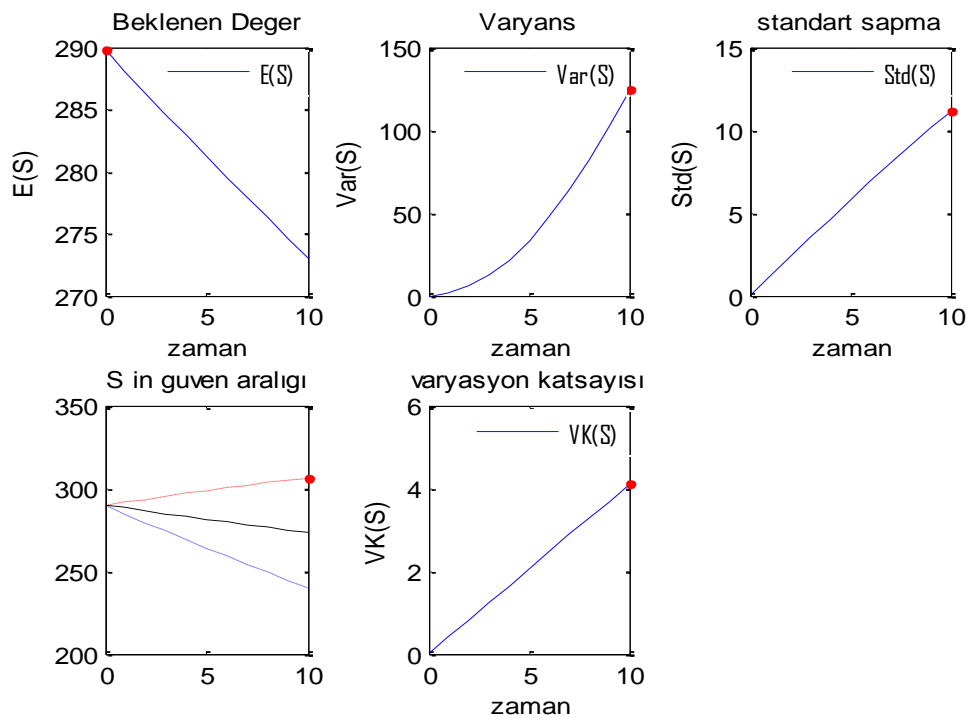
Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(C(n))$	2.552	10	15.3191	10

$C(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(C(10)) \in (2.552, 15.3)$ .

(2.5) modeli bu değer için beklentinin  $GA(C(10)) = 15.3191$  yani yaklaşık %0.153191 olduğunu ve beklenen yaklaşık diyabet oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla (2.552,15.3) aralığında olduğunu belirtmektedir.

#### 2.5.4. Hipergeometrik Parametreler ile Sayısal Karakteristikleri

(2.5) ile tanımlanan rastgele fark denklem sisteminde,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametrelili hipergeometrik dağılımına sahip rastgele değişken olması durumunda,  $K = 10$  ve  $10^5$  simülasyondan elde edilen olasılık karakteristikler aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.11. Hipergeometrik dağılımına sahip  $S(n)$  duyarlı birey sayısının rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0,10]$ ) değişkenliğin azaldığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.47 ve Şekil 2.11).

Tablo 2.47. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(S(n))$	273	10	289.8	0

Beklenen değerin  $n = 0$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 0$ ) beklenen değer için  $E(S(0)) = 289.8$  değeri elde edilmiştir.

Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.48 ve Şekil 2.11 ).

Tablo 2.48. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(S(n))$	0	0	124.6	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(S(10)) = 124.6$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.11). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo 2.49).

Tablo 2.49. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(S(n))$	0	0	11.16	10

Diyabet oranının  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(S(10)) = 11.16$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $S(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.11).

Tanım itibarıyla varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times std(S(n))/E(S(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (2.5) modelinin kurulumu için rastgele  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $S(n)$  değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.50).

Tablo 2.50. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(S(n))$	0	0	4.089	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $S(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.04089 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

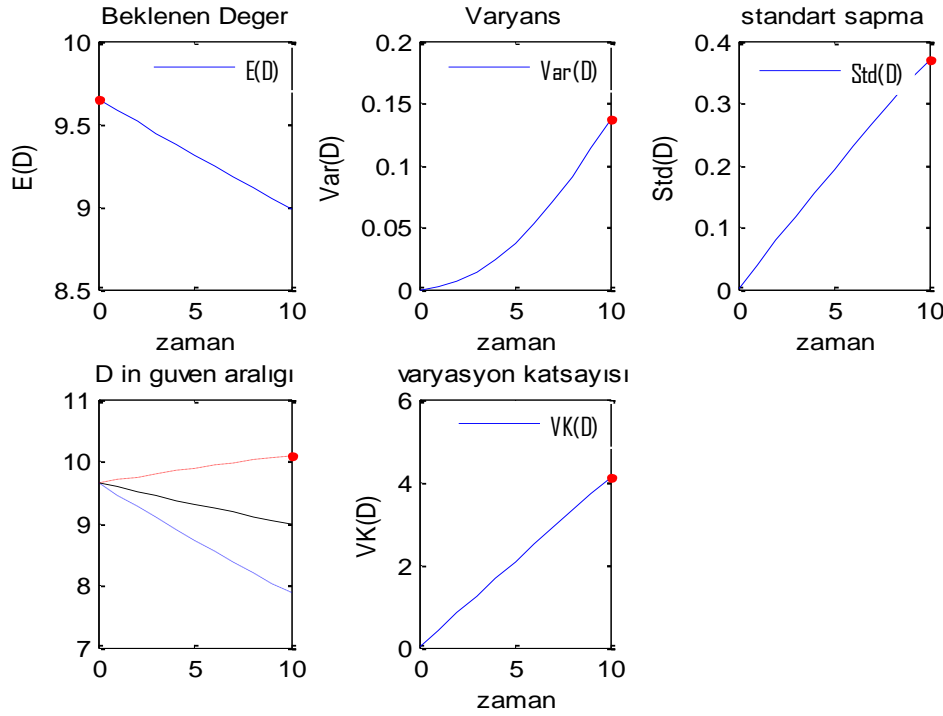
(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 2.11). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(S(n)) - 3 \cdot std(S(n)), E(S(n)) + 3 \cdot std(S(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Hipergeometrik dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.51).

Tablo 2.51. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının güven aralığındaki ekstremum değerler ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(S(n))$	239.5	10	306.601	10

$S(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(S(10)) \in (239.5, 360.6)$ .

(2.5) modeli bu değer için beklentinin  $GA(S(10)) = 306.601$  yani yaklaşık %3.06601 olduğunu ve beklenen yaklaşık diyabet oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla  $(239.5, 360.6)$  aralığında olduğunu belirtmektedir.



Şekil 2. 12. Hipergeometrik dağılımına sahip  $D(n)$  komplike olmayan rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0, 10]$ ) değişkenliğin azaldığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.52 ve Şekil 2.12).

Tablo 2.52. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(D(n))$	8.987	10	9.65	0

Beklenen değer  $n = 0$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde

edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 0$ ) beklenen değer için  $E(D(0)) = 9.65$  değeri elde edilmiştir.

Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.53 ve Şekil 2.12 ).

Tablo 2.53. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan varyansının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(S(n))$	0	0	0.1375	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(D(10)) = 0.1375$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.12). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo 2.54).

Tablo 2.54. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(D(n))$	0	0	0.3708	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(D(10)) = 0.3708$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $D(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.12).

Tanım itibariyle varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times \text{std}(D(n))/E(D(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (2.5) modelinin kurulumu için rastgele  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $D(n)$  değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.55).

Tablo 2.55. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(D(n))$	0	0	4.126	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $D(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.04126 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

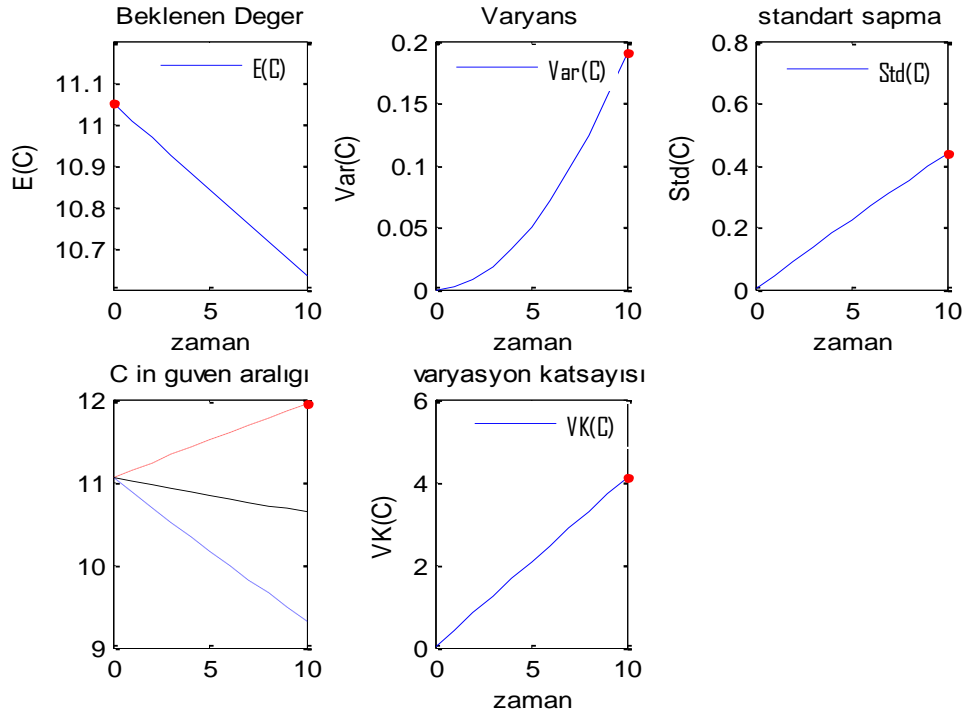
(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 2.12). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(D(n)) - 3 \cdot \text{std}(D(n)), E(D(n)) + 3 \cdot \text{std}(D(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Hipergeometrik dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.56).

Tablo 2.56. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(D(n))$	7.875	10	10.1042	10

$D(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(D(10)) \in (7.875, 10.1)$ .

(2.5) modeli bu değer için beklentinin  $GA(D(10)) = 10.1042$  yani yaklaşık %0.101042 olduğunu ve beklenen yaklaşık diyabet oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla (7.875,10.1) aralığında olduğunu belirtmektedir.



Şekil 2.13. Hipergeometrik dağılımına sahip  $C(n)$  komplikasyon oranının rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0,10]$ ) değişkenliğin arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.57 ve Şekil 2.13).

Tablo 2.57. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(C(n))$	10.63	10	11.05	0

Beklenen değer  $n = 0$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 0$ ) beklenen değer için  $E(C(0)) = 11.05$  değeri elde edilmiştir.



Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.58 ve Şekil 2.13 ).

Tablo 2.58. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(C(n))$	0	0	0.1907	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(C(10)) = 0.1907$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.13). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo 2.59).

Tablo 2.59. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(C(n))$	0	0	0.4367	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(C(10)) = 0.4367$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $C(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.13).

Tanım itibariyle varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times std(C(n))/E(C(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (2.5) modelinin kurulumu için rastgele

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $C(n)$  değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.60).

Tablo 2.60. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(C(n))$	0	0	4.107	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $C(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.04107 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 2.13). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(C(n)) - 3 \cdot \text{std}(C(n)), E(C(n)) + 3 \cdot \text{std}(C(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Hipergeometrik dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.61).

Tablo 2.61. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

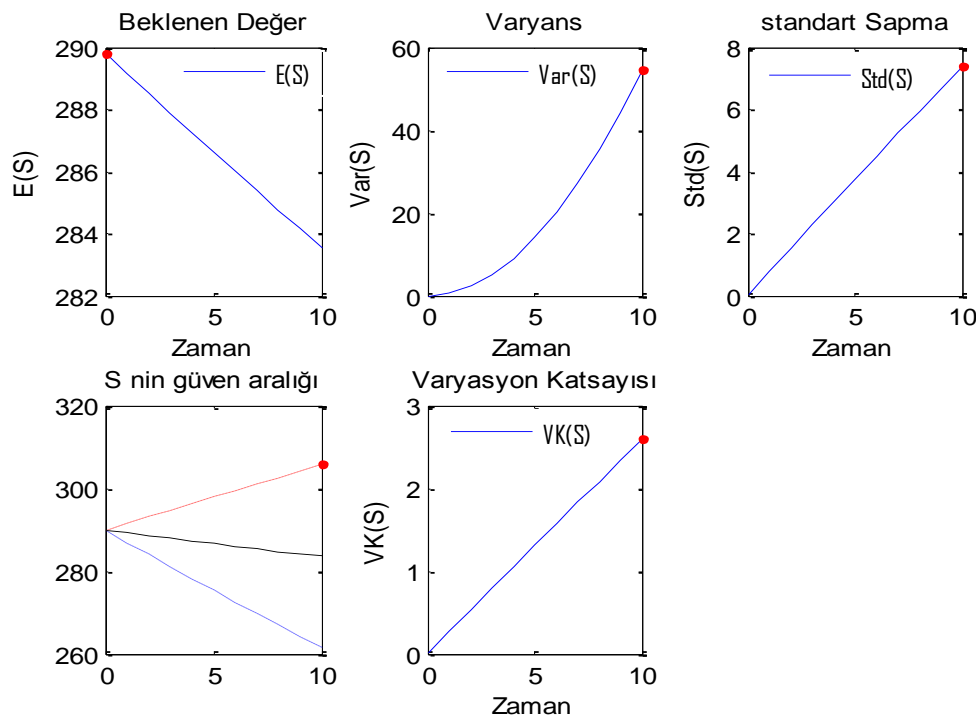
Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(C(n))$	9.322	10	11.9465	10

$C(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(C(10)) \in (9.322, 11.9465)$ .

(2.5) modeli bu değer için beklentinin  $GA(C(10)) = 11.9465$  yani yaklaşık %0.113946 olduğunu ve beklenen yaklaşık şeker oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla (9.322,11.95) aralığında olduğunu belirtmektedir.

### 2.5.5. Poisson Dağılımı Parametreler ile Sayısal Karakteristikleri

(2.5) ile tanımlanan rastgele fark denklem sisteminde,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$   $\lambda = 2$  parametrelili poisson dağılımına sahip rastgele değişken olması durumunda,  $K = 10$  ve  $10^5$  simülasyondan elde edilen olasılık karakteristikler aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.14. Poisson dağılımına sahip  $S(n)$  duyarlı birey sayısının rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0,10]$ ) değişkenliğin azaldığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.62 ve Şekil 2.14).

Tablo 2.62. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(S(n))$	283.6	10	289.8	0

Beklenen değerin  $n = 0$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 0$ ) beklenen değer için  $E(S(0)) = 289.8$  değeri elde edilmiştir.

Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.63 ve Şekil 2.14 ).

Tablo 2.63. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(S(n))$	0	0	54.35	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(S(10)) = 54.35$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.14). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo 2.64).

Tablo 2.64. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(S(n))$	0	0	7.372	10

Diyabet oranının  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(S(10)) = 7.372$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $S(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.14).

Tanım itibarıyla varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times std(S(n))/E(S(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (2.5) modelinin kurulumu için rastgele  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $S(n)$  değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.65).

Tablo 2.65. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(S(n))$	0	0	2.60511	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $S(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.02605 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

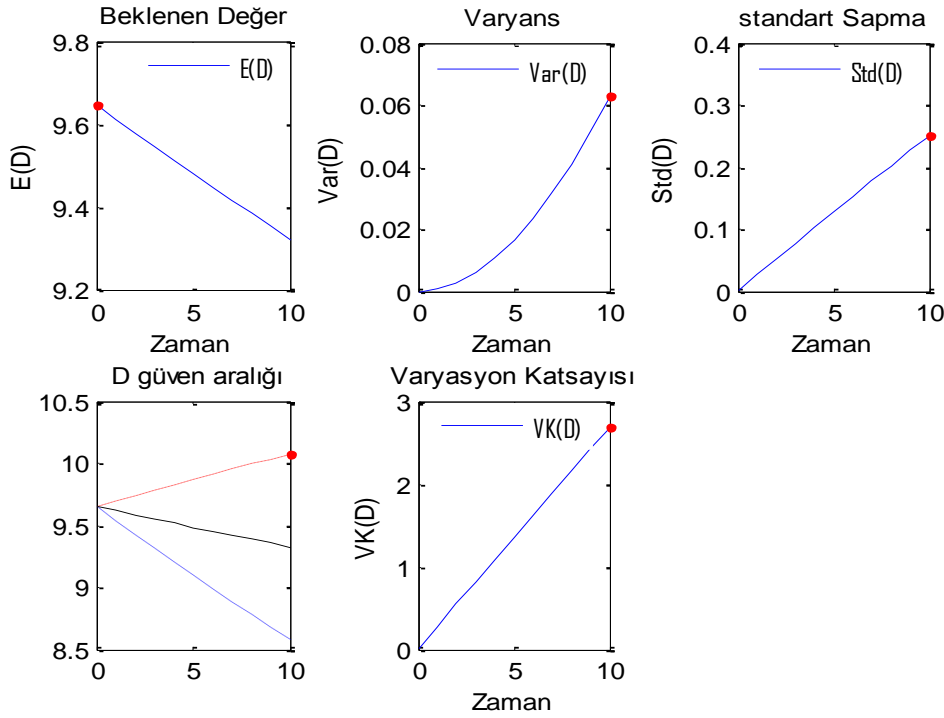
(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 2.14). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(S(n)) - 3 \cdot std(S(n)), E(S(n)) + 3 \cdot std(S(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Poisson dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.66).

Tablo 2.66. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(S(n))$	261.4	10	305.729	10

$S(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalılık aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(S(10)) \in (261.4, 305.7)$ .

(2.5) modeli bu değer için beklentinin  $GA(S(10)) = 305.729$  yani yaklaşık %3.05729 olduğunu ve beklenen yaklaşık şeker oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla  $(261.4, 305.7)$  aralığında olduğunu belirtmektedir.



Şekil 2. 15. Poisson dağılımına sahip  $D(n)$  komplike olmayan rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0, 10]$ ) değişkenliğin azaldığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.67 ve Şekil 2.15).

Tablo 2.67. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(D(n))$	9.326	10	9.65	0

Beklenen değerin  $n = 0$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde

edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 0$ ) beklenen değer için  $E(D(0)) = 9.65$  değeri elde edilmiştir.

Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.68 ve Şekil 2.15 ).

Tablo 2.68. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan varyansının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(S(n))$	0	0	0.06264	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(D(10)) = 0.06264$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.15). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo 2.69).

Tablo 2.69. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(D(n))$	0	0	0.2503	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(D(10)) = 0.2503$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $D(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.15).

Tanım itibariyle varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times \text{std}(D(n))/E(D(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (3) modelinin kurulumu için rastgele  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $D(n)$  değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.70).

Tablo 2.70. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(D(n))$	0	0	2.684	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $D(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.02684 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 2.15). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(D(n)) - 3 \cdot \text{std}(D(n)), E(D(n)) + 3 \cdot \text{std}(D(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Poisson dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.71).

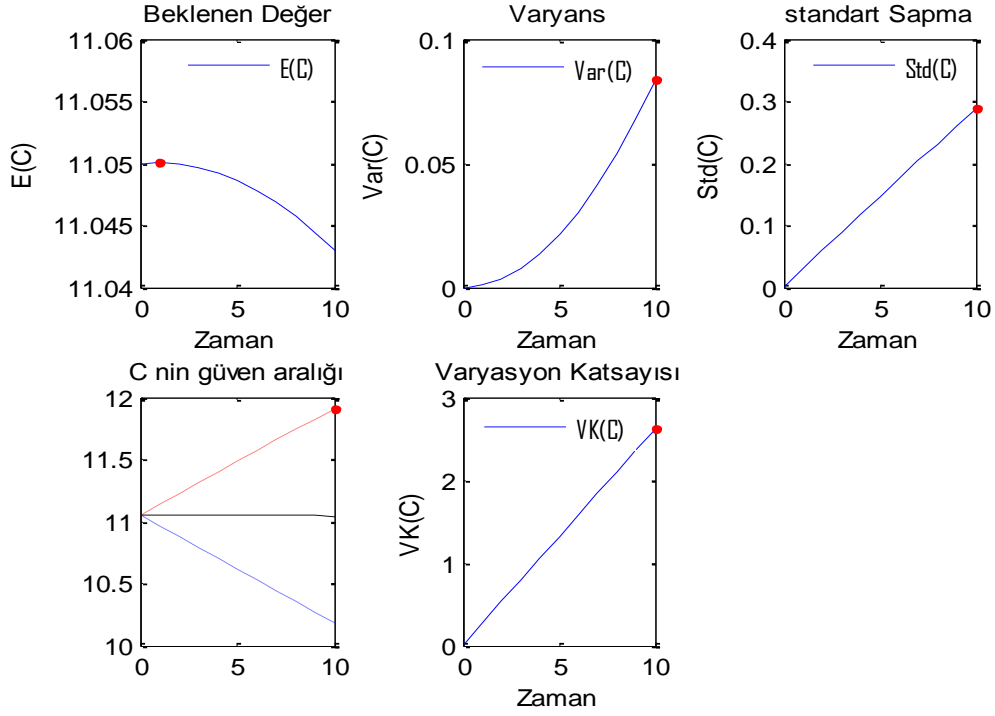
Tablo 2.71. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(D(n))$	8.575	10	10.08	10

$D(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(D(10)) \in (8.574, 10.08)$ .



(2.5) modeli bu değer için beklentinin  $GA(D(10)) = 10.08$  yani yaklaşık %0.100783 olduğunu ve beklenen yaklaşık diyabet oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla  $(8.575, 10.08)$  aralığında olduğunu belirtmektedir.



Şekil 2.16. Poisson dağılımına sahip  $C(n)$  komplikasyon oranının rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0, 10]$ ) değişkenliğin önce stabil ve daha sonra azaldığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.72 ve Şekil 2.16).

Tablo 2.72. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(C(n))$	11.04	10	11.05	1

Beklenen değer  $n = 1$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 1$ ) beklenen değer için  $E(C(1)) = 11.05$  değeri elde edilmiştir.

Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.73 ve Şekil 2.16 ).

Tablo 2.73. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(C(n))$	0	0	0.08337	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(C(10)) = 0.08337$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.16). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo 2.74).

Tablo 2.74. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(C(n))$	0	0	0.2887	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(C(10)) = 0.2887$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $C(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.16).

Tanım itibarıyla varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times std(C(n))/E(C(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (3) modelinin kurulumu için rastgele

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $C(n)$  değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.75).

Tablo 2.75. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(C(n))$	0	0	2.615	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $C(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.02615 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 2.16). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(C(n)) - 3 \cdot \text{std}(C(n)), E(C(n)) + 3 \cdot \text{std}(C(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Poisson dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.76).

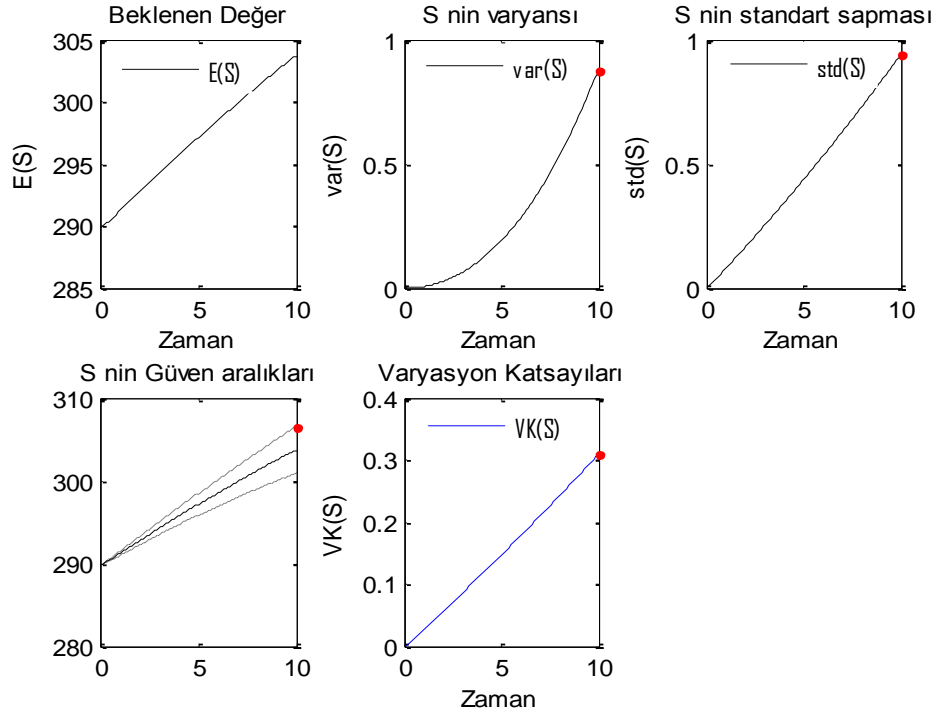
Tablo 2.76. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(C(n))$	10.1820	10	11.9113	10

$C(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(C(10)) \in (10.1820, 11.9179)$ . (2.5) modeli bu değer için beklentinin  $GA(C(10)) = 11.9113$  yani yaklaşık %0.119113 olduğunu ve beklenen yaklaşık diyabet oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla (10.18,11.91) aralığında olduğunu belirtmektedir.

### 2.5.6. Sürekli Zamanlı Düzgün Dağılımı Parametreler ile Sayısal Karakteristikleri

(2.5) ile tanımlanan rastgele fark denklem sisteminde,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametrelili düzgün dağılımına sahip rastgele değişken olması durumunda,  $K = 10$  ve  $10^5$  simülasyondan elde edilen olasılık karakteristikler aşağıda verilmiştir.



Şekil 2. 17. Sürekli Düzgün dağılımına sahip  $S(n)$  duyarlı birey sayısının

SDC model süreci içinde ( $n \in [0,10]$ ) değişkenliğin arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.77 ve Şekil 2.17).

Tablo 2.77. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(S(n))$	289.8	0	303.7	10

Beklenen değerin  $n = 10$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde

edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) beklenen değer için  $E(S(10)) = 303.7$  değeri elde edilmiştir.

Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.78 ve Şekil 2.17).

Tablo 2.78. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(S(n))$	0	0	0.8748	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(S(10)) = 0.8748$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.17). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo 2.79).

Tablo 2.79. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(S(n))$	0	0	0.9353	10

Diyabet oranının  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(S(10)) = 0.9353$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $S(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.17).

Tanım itibarıyla varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times std(S(n))/E(S(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (2.5) modelinin kurulumu için rastgele  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $S(n)$  değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.80).

Tablo 2.80. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(S(n))$	0	0	0.3084	10

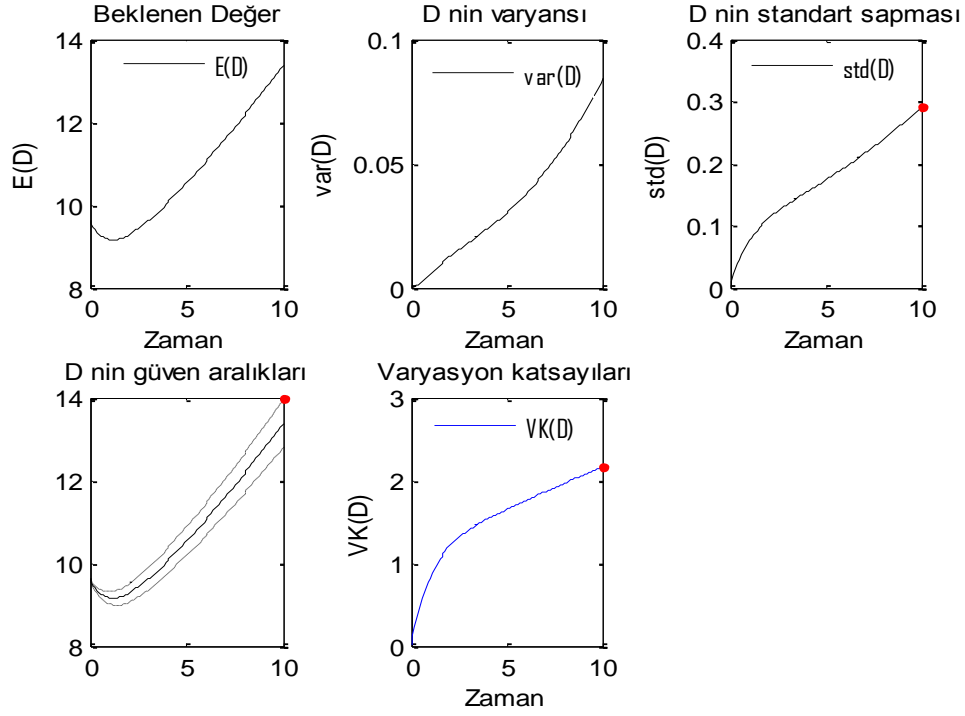
Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $S(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.003084 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 2.17). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(S(n)) - 3 \cdot std(S(n)), E(S(n)) + 3 \cdot std(S(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Sürekli düzgün dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.81).

Tablo 2.81. Rastgele  $S(n)$  duyarlı birey sayısının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(S(n))$	300.9	10	306.5	10

$S(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(S(10)) \in (300.9, 306.5) \cdot (2.5)$  modeli bu değer için beklentinin  $GA(S(10)) = 306.5$  yani yaklaşık %3.065 olduğunu ve beklenen yaklaşık şeker oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla  $(300.9, 306.5)$  aralığında olduğunu belirtmektedir.



Şekil 2.18. Sürekli Düzgün dağılımına sahip  $D(n)$  komplike olmayan rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0, 10]$ ) değişkenliğin arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.82 ve Şekil 2.18).

Tablo 2.82. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(D(n))$	9.159	0	13.39	10

Beklenen değerin  $n = 10$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) beklenen değer için  $E(D(10)) = 13.39$  değeri elde edilmiştir.

Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.68 ve Şekil 2.15 ).

Tablo 2.83. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan varyansının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(D(n))$	0	0	0.08407	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(D(10)) = 0.08407$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.18). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo 2.84).

Tablo 2.84. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(D(n))$	0	0	0.2899	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(D(10)) = 0.2899$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $D(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.18).

Tanım itibarıyla varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation - CV)  $100 \times std(D(n))/E(D(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (2.5) modelinin kurulumu için rastgele



$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $D(n)$  değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.85).

Tablo 2.85. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(D(n))$	0	0	2.165	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $D(n)$  varyasyon oranının devamlı arttığı ve  $n = 10$  anında %0.002165 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilmektedir.

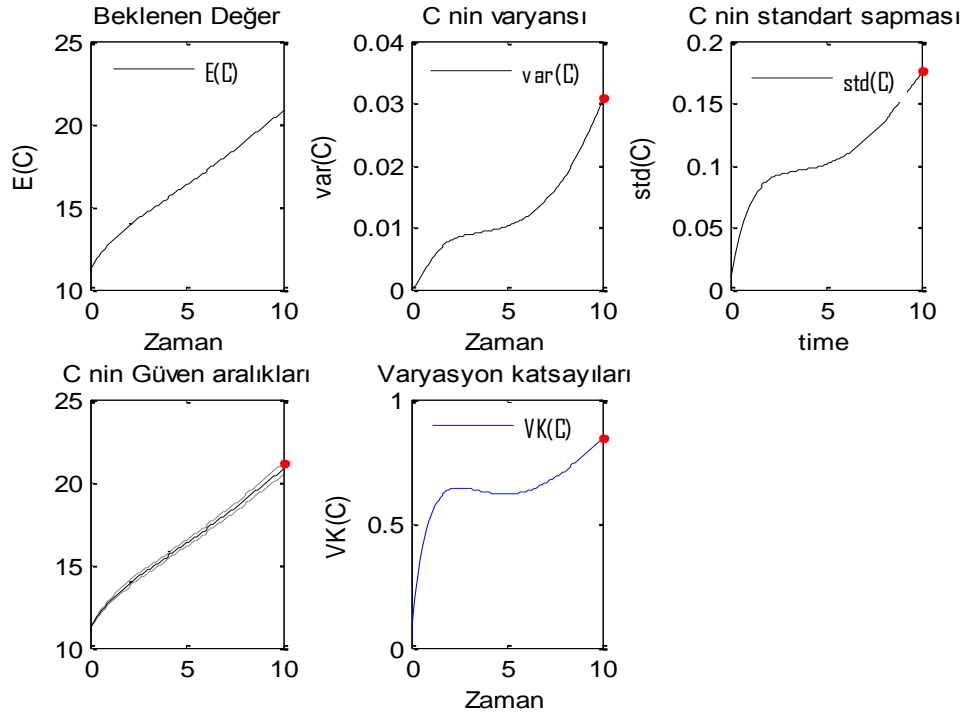
(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 2.18). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(D(n)) - 3 \cdot \text{std}(D(n)), E(D(n)) + 3 \cdot \text{std}(D(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Sürekli düzgün dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.86).

Tablo 2.86. Rastgele  $D(n)$  komplike olmayan güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(D(n))$	12.81	10	13.97	10

$D(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(D(10)) \in (12.81, 13.97)$ .

(2.5) modeli bu değer için beklentinin  $GA(D(10)) = 13.97$  yani yaklaşık %0.1397 olduğunu ve beklenen yaklaşık diyabet oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla  $(12.81, 13.97)$  aralığında olduğunu belirtmektedir.



Şekil 2.19. Sürekli Düzgün dağılımına sahip  $C(n)$  komplikasyon oranının rastgele davranışları

SDC model süreci içinde ( $n \in [0, 10]$ ) değişkenliğin arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.87 ve Şekil 2.19).

Tablo 2.87. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının beklenen değeri ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$E(C(n))$	11.05	0	20.83	10

Beklenen değer  $n = 10$  anında en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) beklenen değer için  $E(C(10)) = 20.83$  değeri elde edilmiştir.

Benzer şekilde, SDC modeli için varyans değişimi ( $n \in [0,10]$ ) arttığı görülmektedir. Ekstremum değerler tabloda görülmektedir (Tablo 2.88 ve Şekil 2.19).

Tablo 2.88. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının varyansının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Var(C(n))$	0	0	0.03085	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Var(C(10)) = 0.03085$  değeri elde edilmiştir.

SDC modelinin standart sapmadaki değişimleri, varyansa benzer şekilde, aşağıda görülmektedir (Şekil 2.19). Varyansın karekökü olarak bilinen standart sapma, iki sayısal karakteristiğin benzer davranış göstermesi beklenen sonuçtur. Aşağıda verilen tabloda standart sapmalar için ekstremum değerler görülmektedir (Tablo 2.89).

Tablo 2.89. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının standart sapmanın ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$Std(C(n))$	0	0	0.1756	10

Diyabetin  $n = 10$  anında ortalamadan sapmanın en üst seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelde bu anlarda gerçekleşen rastgele bir deneyde daha farklı sonuçlar elde edilmesi ile gözlemlenme ihtimali daha yüksektir. Süreç sonunda ek olarak ( $n = 10$ ) varyans için  $Std(C(10)) = 0.1756$  değeri elde edilmiştir.

(2.5) rastgele modelinde  $C(n)$  değişkenleri için elde edilen beklenen değerler ve standart sapmalar için sonuçlar kullanılarak varyasyon katsayıları da aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır (Şekil 2.19).

Tanım itibarıyla varyasyon katsayısı (Coefficient of Variation CV)  $100 \times std(C(n))/E(C(n))$  şeklinde hesaplanmaktadır ve (3) modelinin kurulumu için rastgele

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \rho$  parametreleri %5 varyasyon katsayısına sahip olacak şekilde tanımlanmıştır. Ancak incelenen modelin sonucunda varyasyon katsayısının  $C(n)$  değişkenlerinin daha yüksek oranlara çıktığı görülmektedir. Varyasyon katsayılarının ekstremum değerleri aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.90).

Tablo 2.90. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının varyasyon katsayısının ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$VK(C(n))$	0	0	0.8431	10

Parametrelerdeki %5 varyasyon katsayısına rağmen  $C(n)$  varyasyon oranının önce arttığı daha sonra stabil olup tekrar arttığı ve  $n = 10$  anında %0.008431 seviyelerine ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla rastgele sonuçlardaki değişkenliğin ilerledikçe arttığını yorumu yapılabilir.

(2.5) modeli için elde edilen beklenen değerlerinin sonuçları aşağıdaki şekilde verilmektedir (Şekil 2.19). Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (E(C(n)) - 3 \cdot \text{std}(C(n)), E(C(n)) + 3 \cdot \text{std}(C(n)))$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. Sürekli düzgün dağılım için yaklaşık %99 rastgele değişkeninin değerleri bu aralığı içermektedir. Yukarıdaki formül yardımıyla elde edilen güven aralıklarındaki maksimum ve minimum değerler için aşağıdaki tabloda verilmektedir (Tablo 2.91).

Tablo 2.91. Rastgele  $C(n)$  komplikasyon oranının güven aralığındaki ekstremum değerleri ve zamanları

Değişken	Minimum	Zamanı	Maksimum	Zamanı
$GA(C(n))$	20.48	10	21.18	10

$C(n)$  değişkenleri için sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıklar şöyle elde edilmiştir:  $GA(C(10)) \in (20.48, 21.18)$ .

(2.5) modeli bu değer için beklentinin  $GA(C(10)) = 21.18$  yani yaklaşık %0.2118 olduğunu ve beklenen yaklaşık diyabet oranının  $n = 10$  anında yaklaşık %99 olasılıkla (20.48,21.181) aralığında olduğunu belirtmektedir.

## 2.6. Kesikli Düzgün ve Sürekli Düzgün Dağılımlarının Karşılaştırılması

Rastgele modelde katsayılar normal ve düzgün dağılımlardan seçilerek elde edilen çözümlerin öncelikle beklenen değerleri, varyansları, standart sapmaları, varyasyon katsayıları ve güven aralıkları karşılaştırılmaktadır. Bu şekilde rastgele modelin kesikli ve sürekli zaman dağılımlarının olasılık karakteristikleri arasındaki farklar incelenmektedir.

### 2.6.1. Dağılımların Beklenen Değerlerinin Analizleri

Modeldeki sonuçlar ile (2.20) ve (2.30) rastgele modelindeki beklenen değerlerinin sonuçlarının benzer olduğu Şekil 2.2,2.3,2.4,2.17,2.18,2.19 görülmektedir. Bu şekildeki benzerlikleri aşağıdaki şekilde görülmektedir.

Tablo 2.92. Rastgele modelin  $S(n)$  değişkenine ait beklenen değerleri

$E(S(n))$	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Kesikli Düzgün Dağılım	289.8	0	290	10
Sürekli Düzgün Dağılım	289.8	0	303.7	10

Tablo 2.93. Rastgele modelin  $D(n)$  değişkenine ait beklenen değerleri

$E(D(n))$	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Kesikli Düzgün Dağılım	9.533	10	9.65	0
Sürekli Düzgün Dağılım	9.159	10	13.39	0

Tablo 2.94. Rastgele modelin  $C(n)$  değişkenine ait beklenen değerleri

$E(C(n))$	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
-----------	---------	-------	----------	-------

Kesikli Düzgün Dağılım	11.05	0	11.32	10
Sürekli Düzgün Dağılım	11.05	0	20.83	10

Tablo 2.92, Tablo 2.93, Tablo 2.94 incelendiğinde (2.20) kesikli düzgün dağılım ve (2.30) sürekli düzgün dağılımına ait rastgele modelinin beklenen değerlerini karşılaştırıldığında iki dağılıma ait parametrelili modelin sonuçlarında sürekli düzgün dağılımın kesikli düzgün dağılıma göre daha yüksek değerler olduğu görülmektedir. Bu durum rastgele modellerin tutarlı olduğunu ve olasılık dağılımları açısından fark olmadığını göstermektedir Oluşan bu küçük farklılıklar modelin rastgele etkilerinin sonucudur(Şekil 2.2,2.3,2.4 ve Şekil 2.17,2.18,2.19).

### 2.6.2. Dağılımların Varyans Analizleri

Bu kısımda (2.20) ve (2.30) rastgele modellerinde elde edilen değişkenlerinin kesikli düzgün ve sürekli düzgün dağılımları için benzer olduğu verilmektedir.

Tablo 2.95. Rastgele modelin  $S(n)$  değişkenine ait varyans değerleri

$Var(S(n))$	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Kesikli Düzgün Dağılım	0	0	0.006694	10
Sürekli Düzgün Dağılım	0	0	0.8748	10

Tablo 2.96. Rastgele modelin  $D(n)$  değişkenine ait varyans değerleri

$Var(D(n))$	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Kesikli Düzgün Dağılım	0	0	0.01163	10
Sürekli Düzgün Dağılım	0	0	0.08407	10

Tablo 2.97. Rastgele modelin  $C(n)$  değişkenine ait varyans değerleri

$Var(C(n))$	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Kesikli Düzgün Dağılım	0	0	0.01101	10
Sürekli Düzgün Dağılım	0	0	0.03085	10

Burada SDC modeli için varyans değişiminin arttığı görülmektedir. Ekstremum noktalarının verildiği Tablo 2.95,Tablo 2.96,Tablo 2.97 de görülmektedir.  $n = 10$  anında iki dağılımında ortalama sapması en yüksek seviyede olup deterministik modelden elde edilen sonuçların süreç sonunda ( $n = 10$ ) sürekli düzgün dağılımın varyans değerleri kesikli düzgün dağılımın varyans değerlerinden yüksek olduğu görülmektedir. Oluşan bu küçük farklılıklar modelin rastgele etkilerinin sonucudur (Şekil 2.2,2.3,2.4 ve Şekil 2.17,2.18,2.19).

### 2.6.3. Dağılımların Standart Sapma Analizleri

Burada varyans değerlerine benzer şekilde SDC modelinin (2.20) ve (2.30) rastgele modellerinde elde edilen değişkenlerinin kesikli düzgün ve sürekli düzgün dağılımlarının standart sapması varyansın karekökü olduğu için karakteristiklerinin benzer olduğu görülmektedir.

Tablo 2.98. Rastgele modelin  $S(n)$  değişkenine ait standart sapmanın değerleri

$Std(S(n))$	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Kesikli Düzgün Dağılım	0	0	0.08182	10
Sürekli Düzgün Dağılım	0	0	0.9353	10

Tablo 2.99. Rastgele modelin  $D(n)$  değişkenine ait standart sapmanın değerleri

$Std(D(n))$	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Kesikli Düzgün Dağılım	0	0	0.1078	10

Sürekli Düzgün Dağılım	0	0	0.2899	10
------------------------	---	---	--------	----

Tablo 2.100. Rastgele modelin  $C(n)$  değişkenine ait standart sapmanın değerleri

$Std(C(n))$	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Kesikli Düzgün Dağılım	0	0	0.1049	10
Sürekli Düzgün Dağılım	0	0	0.1756	10

SDC modelinin ekstremum noktalarındaki standart sapmalar Tablo 2.98,Tablo 2.99,Tablo 2.100 de verilen iki dağılımında  $n = 10$  anında ortalama sapmasının yüksek seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelden elde edilen sonuçlar süreç sonunda ( $n = 10$ ) sürekli düzgün dağılımın standart sapma değerleri kesikli düzgün dağılımın standart sapma değerlerinden yüksek olduğu görülmektedir. Oluşan bu küçük farklılıklar modelin rastgele etkilerinin sonucudur (Şekil 2.2,2.3,2.4 ve Şekil 2.17,2.18,2.19).

#### 2.6.4. Dağılımların Varyasyon Katsayı Analizleri

Bu bölümde  $S(n), D(n), C(n)$  için varyasyon katsayılarının karşılaştırılması yapılmaktadır. Burada iki dağılımında standart sapma ve beklenen değerleri için elde edilen sonuçları kullanarak (2.5) rastgele modelinin değişkenlerini kullanarak

$$VK = 100 \times \frac{\text{standart sapma}}{\text{beklenen değer}}$$

şeklinde formüle sahip olmaktadır. Varyasyon katsayılarının karşılaştırılmasının ekstremum değerleri aşağıdaki tablolarda verilmektedir.

Tablo 2.101. Rastgele modelin  $S(n)$  değişkenine ait varyasyon katsayı değerleri

$VK(S(n))$	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Kesikli Düzgün Dağılım	0	0	0.02822	10



Sürekli Düzgün Dağılım	0	0	0.3084	10
------------------------	---	---	--------	----

Tablo 2.102. Rastgele modelin  $D(n)$  değişkenine ait varyasyon katsayı değerleri

$VK(D(n))$	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Kesikli Düzgün Dağılım	0	0	1.131	10
Sürekli Düzgün Dağılım	0	0	2.165	10

Tablo 2.103. Rastgele modelin  $C(n)$  değişkenine ait varyasyon katsayı değerleri

$VK(C(n))$	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Kesikli Düzgün Dağılım	0	0	0.9266	10
Sürekli Düzgün Dağılım	0	0	0.8431	10

Bu modelde varyans ve standart sapmalar minimum değerleri sıfırdır.  $S(n), D(n)$  için sürekli düzgün dağılımın varyasyon katsayıları ve kesikli düzgün dağılımındaki varyasyon katsayılarına göre biraz daha yüksektir ve  $C(n)$  için bu durum aksi hal alır (Şekil 2.2,2.3,2.4 ve Şekil 2.17,2.18,2.19). Rastgele parametreler tüm dağılımlar için %5 VK'ye sahip olacak şekilde tanımlandığı için  $S(n), D(n), C(n)$  değişkenleri benzer varyasyon katsayılarına sahiptir. Ancak bu durum nedeniyle varyasyon katsayıları arasında küçük farklılıklar olmuştur (Şekil 2.2,2.3,2.4 ve Şekil 2.17,2.18,2.19).

#### 2.6.5. Dağılımların Ekstremum Noktalarındaki Güven Aralıklarının Analizleri

Bu kısımda (2.20) ve (2.30) rastgele modellerinde elde edilen değişkenlerinin kesikli düzgün ve sürekli düzgün dağılımları için benzer olduğu verilmektedir. (2.5) modelinin

beklenen değerleri için elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde verilmektedir. Şekilde verilen güven aralıkları  $GA = (\text{Beklenen değer} - 3 \times \text{Standart sapma}, \text{Beklenen değer} + 3 \times \text{Standart sapma})$  şeklinde hesaplanmıştır ve beklenen değerler için üç standart sapma içindeki değişim aralığını vermektedir. kesikli düzgün ve sürekli düzgün dağılımlar için bu aralıkların rastgele değişkenin değerlerinin yaklaşık %99'unu içermektedir.

Tablo 2.104. Rastgele modelin  $S(n)$  değişkenine ait güven aralığındaki ekstremum değerleri

$GA(S(n))$	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Kesikli Düzgün Dağılım	289.8	10	290.2	10
Sürekli Düzgün Dağılım	300.9	10	306.5	10

Tablo 2.105. Rastgele modelin  $D(n)$  değişkenine ait güven aralığındaki ekstremum değerleri

$GA(D(n))$	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Kesikli Düzgün Dağılım	9.21	10	9.857	10
Sürekli Düzgün Dağılım	12.81	10	13.39	10

Tablo 2.106. Rastgele modelin  $C(n)$  değişkenine ait güven aralığındaki ekstremum değerleri

$GA(C(n))$	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
Kesikli Düzgün Dağılım	11.05	10	11.64	10
Sürekli Düzgün Dağılım	20.48	10	21.18	10

SDC modelinin ekstremum noktalarının değişiminin arttığı görülmektedir. Verilen Tablo 2.104,Tablo 2.105,Tablo 2.106 de görülmektedir. Sürecin sonunda üç standart sapmalık aralıkları  $S(n), D(n), C(n)$  değişkenleri için  $n = 10$  anında iki dağılımında ortalama sapması en yüksek seviyede olup deterministik modelden elde edilir. Burada sürekli düzgün dağılımın ekstremum noktalarındaki değerler kesikli düzgün dağılımın ekstremum noktalarındaki değerlerinden yaklaşık %99 olasılıkla yüksek olduğu görülmektedir. Oluşan bu küçük farklılıklar modelin rastgele etkilerinin sonucudur (Şekil 2.2,2.3,2.4 ve Şekil 2.17,2.18,2.19).

#### 2.6.6. SDC Modelinin Farklı Kesikli Dağılımlarından Elde Edilen Olasılık Karakteristiklerinin Karşılaştırılması

Rastgele modelde katsayılar kesikli zamanlı olasılık dağılımları seçilerek elde edilen çözümlerin öncelikle beklenen değerleri, varyansları, standart sapmaları, varyasyon katsayıları ve güven aralıkları karşılaştırılmaktadır. Bu şekilde rastgele modelin kesikli düzgün dağılımı, binom dağılımı, geometrik dağılımı, hipergeometrik dağılımı, poisson dağılımı ve sürekli zaman dağılımlarının olasılık karakteristikleri arasındaki farklar incelenmektedir.

Tablo 2.107. Rastgele modelin  $S(n), D(n), C(n)$  değişkenlerine ait beklenen değerleri

	<b>Kesikli Düzgün Dağılım</b>	<b>Binom Dağılım</b>	<b>Geometrik Dağılım</b>	<b>Hipergeometrik Dağılım</b>	<b>Poisson Dağılım</b>	<b>Sürekli Düzgün Dağılım</b>
<b><math>E(S(n))</math></b>						
Minimum	289.8	280.1	227.4	273	283.6	289.8
Zaman	0	10	10	10	10	0
Maksimum	290	289.8	289.8	289.8	289.8	303.7
Zaman	10	0	0	0	0	10
<b><math>E(D(n))</math></b>						
Minimum	9.533	9.267	7.458	8.987	9.326	9.159
Zaman	10	10	10	10	10	0

Maksimum	9.65	9.65	9.65	9.65	9.65	13.39
Zaman	0	0	0	0	0	10
$E(C(n))$						
Minimum	11.05	10.95	8.925	10.63	11.04	11.05
Zaman	0	10	10	10	10	0
Maksimum	11.32	11.05	11.05	11.05	11.05	20.83
Zaman	10	0	0	0	1	10

Tablo 2.107,  $S, D, C$  bileşenleri için kesikli zamanlı olasılık dağılımlarına ait rastgele modelinin beklenen değerlerini karşılaştırıldığında dağılımlara ait parametrelili modelin sonuçları birbirleri ile benzer değerler olduğu görülmektedir. Bu durum rastgele modellerin tutarlı olduğunu ve olasılık dağılımları açısından fark olmadığını göstermektedir. Oluşan bu küçük farklılıklar modelin rastgele etkilerinin sonucudur (Şekil 2.2, 2.3, 2.4 ve Şekil 2.17, 2.18, 2.19).

Tablo 2.108. Rastgele modelin  $S(n), D(n), C(n)$  değişkenlerine ait varyans değerleri

	Kesikli Düzgün Dağılım	Binom Dağılım	Geometrik Dağılım	Hipergeometrik Dağılım	Poisson Dağılım	Sürekli Düzgün Dağılım
$Var(S(n))$						
Minimum	0	0	0	0	0	0
Zaman	0	0	0	0	0	0
Maksimum	0.006694	58.08	2930	124.6	54.35	0.8748
Zaman	10	10	10	10	10	10
$Var(D(n))$						
Minimum	0	0	0	0	0	0
Zaman	0	0	0	0	0	0

Tablo 2.108. (devamı)

Maksimum	0.01163	0.06418	3.241	0.1375	0.06264	0.08407
----------	---------	---------	-------	--------	---------	---------

Zaman	10	10	10	10	10	10
<b><math>Var(C(n))</math></b>						
Minimum	0	0	0	0	0	0
Zaman	0	0	0	0	0	0
Maksimum	0.01101	0.08863	4.55665	0.1907	0.08337	0.03085
Zaman	10	10	10	10	10	10

Burada  $S, D, C$  bileşenleri için varyans değişiminin arttığı görülmektedir. Ekstremum noktalarının verildiği Tablo 2.108 de görülmektedir.  $n = 10$  anında dağılımların ortalama sapması en yüksek seviyede olup deterministik modelden elde edilen sonuçların süreç sonunda ( $n = 10$ ) varyans değerlerinden yüksek olduğu görülmektedir. Oluşan bu küçük farklılıklar modelin rastgele etkilerinin sonucudur (Şekil 2.2,2.3,2.4 ve Şekil 2.17,2.18,2.19).

Tablo 2.109. Rastgele modelin  $S(n), D(n), C(n)$  değişkenlerine ait standart sapma değerleri

	Kesikli Düzgün Dağılım	Binom Dağılım	Geometrik Dağılım	Hipergeo metrik Dağılım	Poisson Dağılım	Sürekli Düzgün Dağılım
<b><math>Std(S(n))</math></b>						
Minimum	0	0	0	0	0	0
Zaman	0	0	0	0	0	0
Maksimum	0.08182	7.621	54.13	11.16	7.372	0.9353
Zaman	10	10	10	10	10	10
<b><math>Std(D(n))</math></b>						
Minimum	0	0	0	0	0	0
Zaman	0	0	0	0	0	0
Maksimum	0.1078	0.02533	1.8	0.3708	0.2503	0.2899
Zaman	10	10	10	10	10	10
<b><math>Std(C(n))</math></b>						
Minimum	0	0	0	0	0	0
Zaman	0	0	0	0	0	0
Maksimum	0.1049	0.2977	2.13463	0.4367	0.2887	0.1756

Zaman	10	10	10	10	10	10
-------	----	----	----	----	----	----

$S, D, C$  bileşenleri ekstremum noktalarındaki standart sapmalar Tablo 2.109 da verilen kesikli zamanlı olasılık dağılımları  $n = 10$  anında ortalama sapmasının yüksek seviyeye ulaştığı görülmektedir. Dolayısıyla deterministik modelden elde edilen sonuçlar süreç sonunda ( $n = 10$ ) standart sapma değerlerinden yüksek olduğu görülmektedir. Oluşan bu küçük farklılıklar modelin rastgele etkilerinin sonucudur (Şekil 2.2,2.3,2.4 ve Şekil 2.17,2.18,2.19).

Tablo 2.110. Rastgele modelin  $S(n), D(n), C(n)$  değişkenlerine ait varyasyon katsayı değerleri

	Kesikli Düzgün Dağılım	Binom Dağılım	Geometri k Dağılım	Hipergeo metrik Dağılım	Poisson Dağılım	Sürekli Düzgün Dağılım
<b><math>VK(S(n))</math></b>						
Minimum	0	0	0	0	0	0
Zaman	0	0	0	0	0	0
Maksimu m	0.02822	2.709	23.82	4.089	2.60511	0.002825
Zaman	10	10	10	10	10	10
<b><math>VK(D(n))</math></b>						
Minimum	0	0	0	0	0	0
Zaman	0	0	0	0	0	0
Maksimu m	1.131	2.734	24.14	4.126	2.684	0.1137
Zaman	10	10	10	10	10	10
<b><math>VK(C(n))</math></b>						
Minimum	0	0	0	0	0	0
Zaman	0	0	0	0	0	0
Maksimu m	0.9266	2.719	23.9438	4.107	2.615	0.09386
Zaman	10	10	10	10	10	10

$S, D, C$  bileşenleri için kesikli zamanlı olasılık dağılımlarının varyasyon katsayılarına verilmektedir. Rastgele parametreler tüm dağılımlar için %5 VK'ye sahip olacak şekilde tanımlandığı için  $S(n), D(n), C(n)$  değişkenleri benzer varyasyon katsayılarına sahiptir. Ancak bu durum nedeniyle varyasyon katsayıları arasında küçük farklılıklar olmuştur (Şekil 2.2,2.3,2.4 ve Şekil 2.17,2.18,2.19).

Tablo 2.111. Rastgele modelin  $S(n), D(n), C(n)$  değişkenlerine ait güven aralık değerleri

	<b>Kesikli Düzgün Dağılım</b>	<b>Binom Dağılım</b>	<b>Geometrik Dağılım</b>	<b>Hipergeometrik Dağılım</b>	<b>Poisson Dağılım</b>	<b>Sürekli Düzgün Dağılım</b>
<b><math>GA(S(n))</math></b>						
Minimum	289.8	258.6	66.02	239.5	261.4	300.9
Zaman	10	10	10	10	10	10
Maksimum	290.2	304.189	389.691	306.601	305.729	306.5

Tablo 2.111. (devamı)

Zaman	10	10	10	10	10	10
<b><math>GA(D(n))</math></b>						
Minimum	9.21	8.507	2.058	7.875	8.575	12.81
Zaman	10	10	10	10	10	10
Maksimum	9.857	10.03	12.8575	10.1042	10.08	13.97
Zaman	10	10	10	10	10	10
<b><math>GA(C(n))</math></b>						
Minimum	11.05	10.05	2.552	9.322	10.1820	20.48
Zaman	10	10	10	10	10	10
Maksimum	11.64	11.8407	15.3191	11.9465	11.9113	21.18
Zaman	10	10	10	10	10	10

$S, D, C$  bileşenleri için ekstremum noktalarının değişiminin arttığı görülmektedir. Verilen Tablo 2.111 de görülmektedir. Sürecin sonunda üç standart sapmalı aralıkları  $S(n), D(n), C(n)$  değişkenleri için  $n = 10$  anında kesikli zamanlı olasılık dağılımların ortalama sapması en yüksek seviyede olup deterministik modelden elde edilir. Burada dağılımların güven aralığı içinde beklenen değerler için ekstremum noktalarını yaklaşık

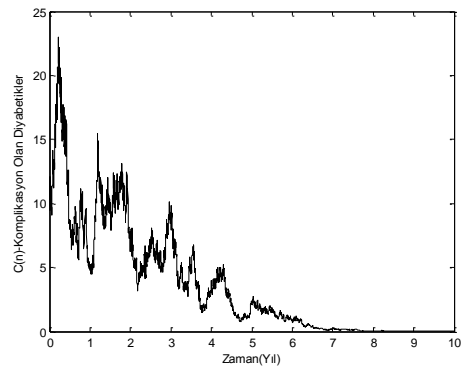
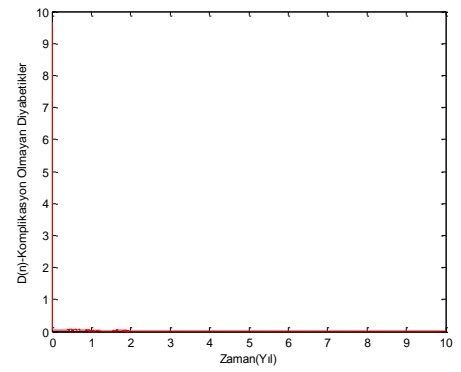
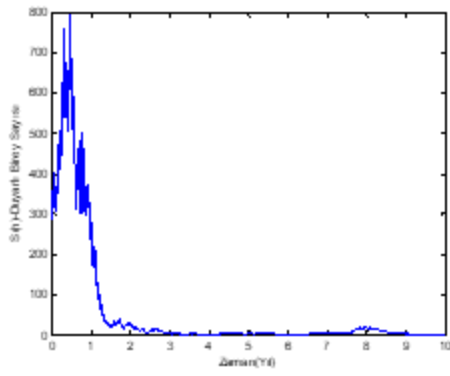
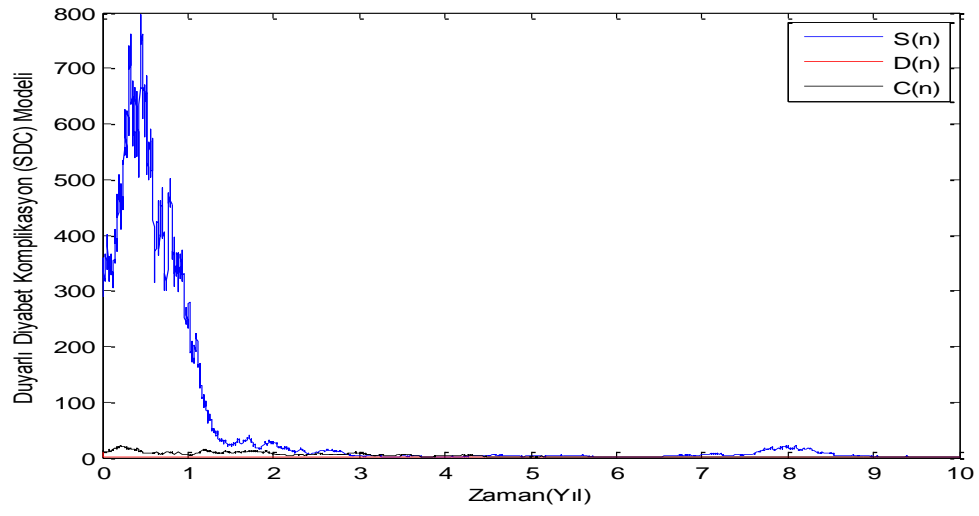
%99 olasılıkla yüksek olduğu görülmektedir. Oluşan bu küçük farklılıklar modelin rastgele etkilerinin sonucudur (Şekil 2.2,2.3,2.4 ve Şekil 2.17,2.18,2.19).

#### **2.6.7. Stokastik Etkiler Altında Duyarlı Diyabet Komplikasyon Modelinin Sonuçları**

Rastgele fark denklemler kullanılarak oluşturulan rastgele modeller denklemlerle başlangıç değerlerinin parametrelerinin rastgele davranışlarını modellemektedir. Stokastik modelde rastgele davranışlarına stokastik gürültü terimi eklenerek elde edilmektedir. Bu bölümde Stokastik Duyarlı diyabet komplikasyon modelinin yaklaşık çözüm yöntemleri olan Stokastik Euler-Maruyama, Stokastik Euler-Milstein, Stokastik Runge-Kutta 2, Stokastik Runge-Kutta 3, Stokastik Runge-Kutta 4, Stokastik Runge-Kutta 5 kullanılarak elde edilmektedir.

(2.5) modeline gürültü terimi eklenerek oluşturulan Stokastik Duyarlı diyabet komplikasyon modelinin (2.31) modeline MATLAB programı ile hesaplanmaktadır. Stokastik Euler-Maruyama yönteminin çözümleri Şekil 2.20. ,Stokastik Euler-Milstein yönteminin çözümleri Şekil.2.21., , Stokastik Runge-Kutta 2 yönteminin çözümleri Şekil 2.22., Stokastik Runge-Kutta 3 yönteminin çözümleri Şekil 2.23., Stokastik Runge-Kutta 4 yönteminin çözümleri Şekil 2.24., Stokastik Runge-Kutta 5 yönteminin çözümleri Şekil 2.25.'te verilmektedir.





Şekil 2.20.(2.31) modelinin Stokastik Euler-Maruyama yöntemi ile çözümleri

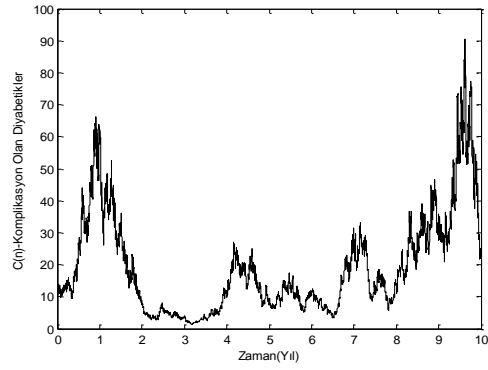
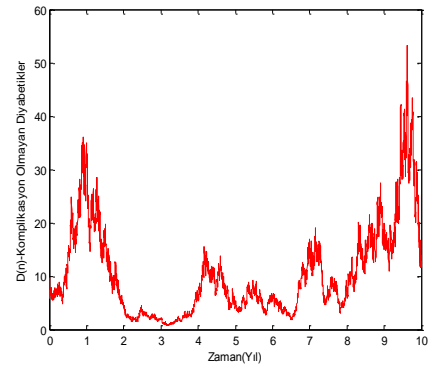
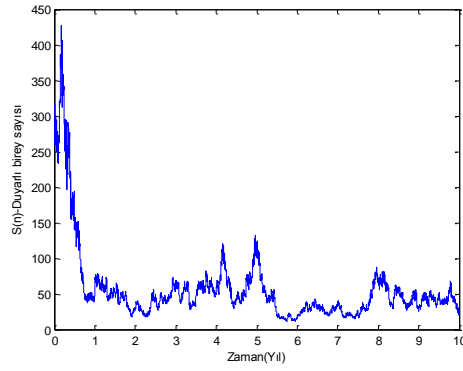
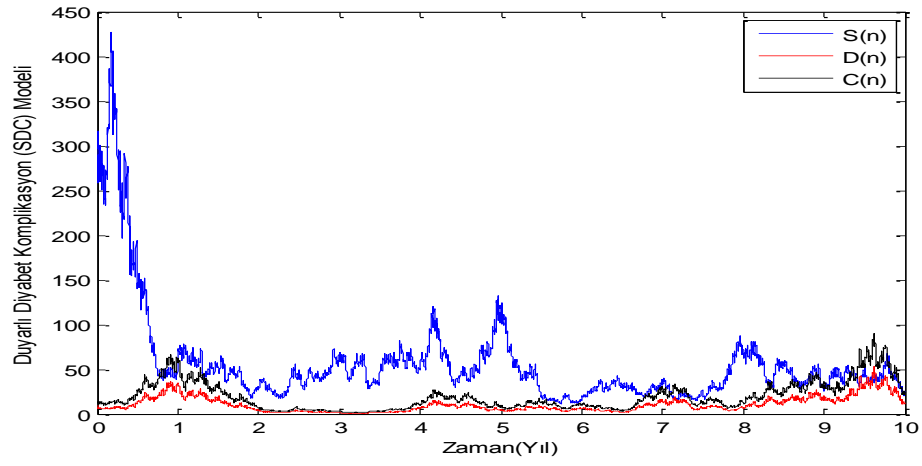
Tablo 2.112. Stokastik Euler-Maruyama modelinin değişkenlerine ait bazı sayısal veriler

Değişken	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
$S(n)$	0.3812	0	796.6	10
$D(n)$	$6.705 \times 10^{-06}$	0	9.65	10
$C(n)$	0.002191	0	23.01	10

(2.31) modelinin Stokastik Euler-Maruyama yöntemiyle elde edilen bazı veriler Şekil 2.20 'de şu şekilde verilmiştir:  $S(n)$  duyarlı birey sayısı için minimum değer  $t = 0$  anında 0.3812 ,maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 796.6 olarak bulunmaktadır.

$D(n)$  komplikasyon olmayan diyabetikler için minimum değeri  $t = 0$  anında  $6.705 \times 10^{-06}$  maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 9.65 olarak bulunmaktadır.

$C(n)$  komplikasyon olan diyabetikler için minimum değeri  $t = 0$  anında 0.002191 maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 23.01 olarak bulunmaktadır.



Şekil 2. 21.(2.31) modelinin Stokastik Milstein yöntemi ile çözümleri

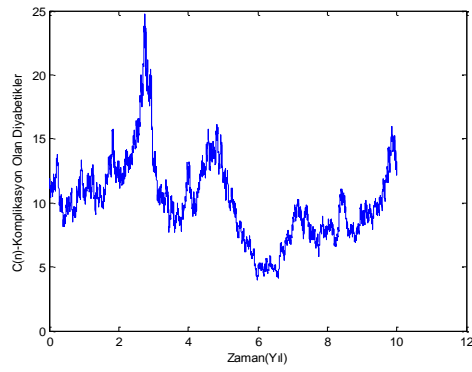
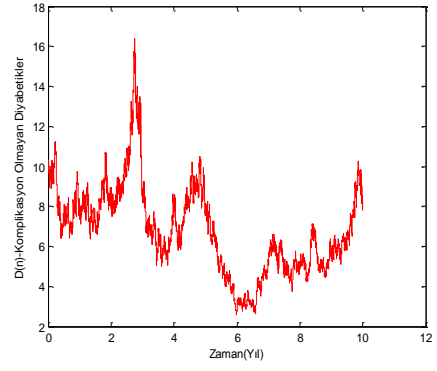
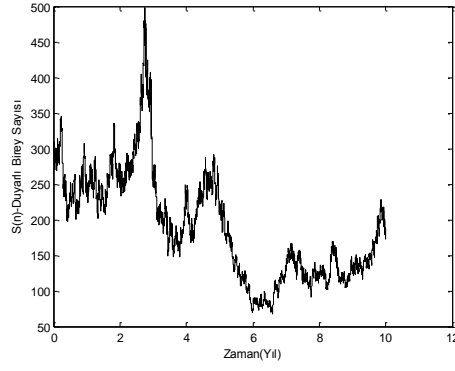
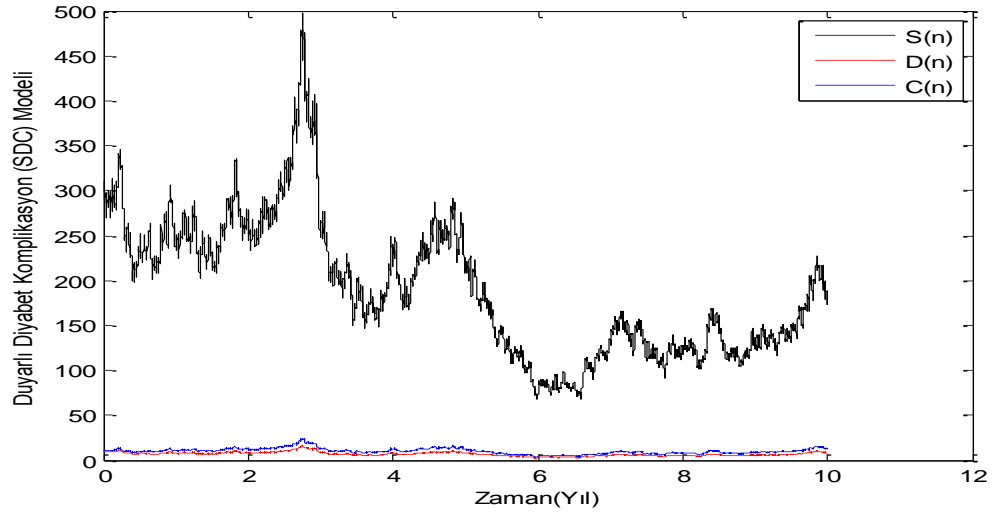
Tablo 2. 113. Stokastik Euler-Milstein modelinin değişkenlerine ait bazı sayısal veriler

Değişken	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
$S(n)$	11.38	0	427.2	10
$D(n)$	0.7136	0	53.22	10
$C(n)$	1.304	0	90.54	10

(2.31) modelinin Stokastik Milstein yöntemiyle elde edilen bazı veriler Şekil 2.21 ‘de şu şekilde verilmiştir:  $S(n)$  duyarlı birey sayısı için minimum değer  $t = 0$  anında 11.38 ,maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 427.2 olarak bulunmaktadır.

$D(n)$  komplikasyon olmayan diyabetikler için minimum değeri  $t = 0$  anında 0.7136 maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 53.22 olarak bulunmaktadır.

$C(n)$  komplikasyon olan diyabetikler için minimum değeri  $t = 0$  anında 1.304 maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 90.54 olarak bulunmaktadır.



Şekil 2. 22.(2.31) modelinin Runge-Kutta 2 yöntemi ile çözümleri

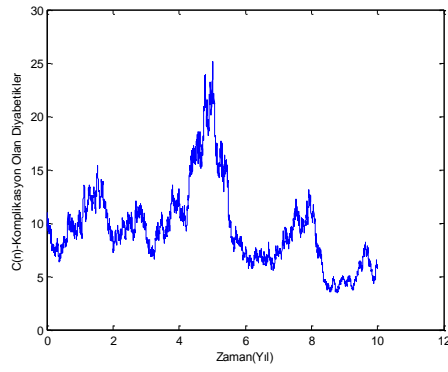
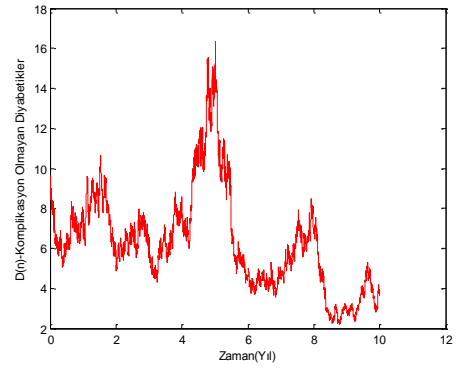
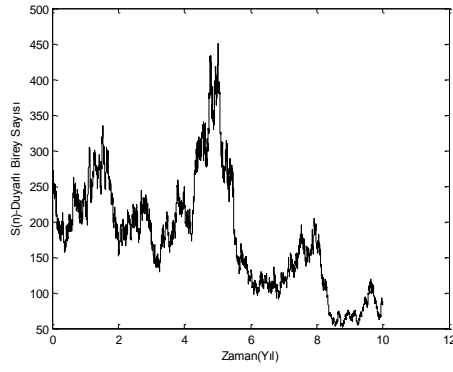
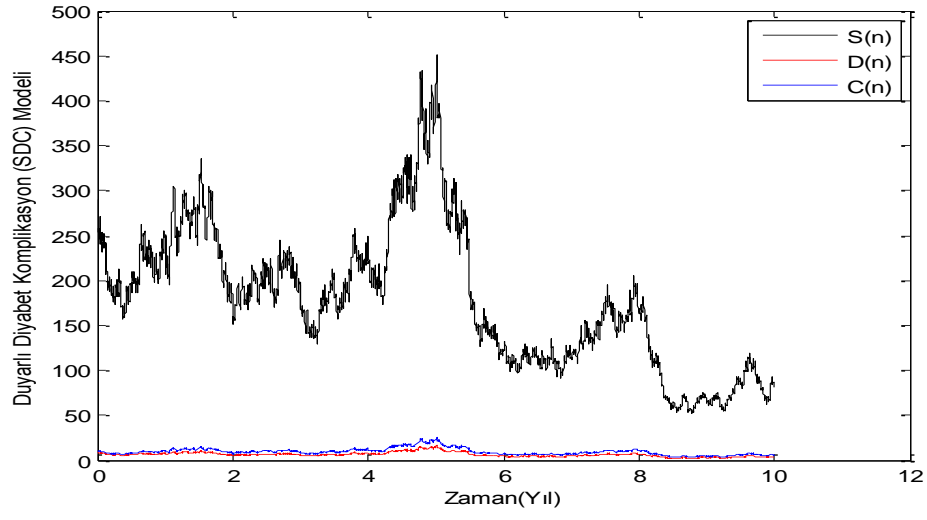
Tablo 2. 114. Stokastik Runge-Kutta 2 modelinin değişkenlerine ait bazı sayısal veriler

Değişken	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
$S(n)$	68.28	0	498.5	10
$D(n)$	2.588	0	16.39	10
$C(n)$	4.009	0	24.76	10

(2.31) modelinin Stokastik Runge-Kutta 2 yöntemiyle elde edilen bazı veriler Şekil 2.22 'de şu şekilde verilmiştir:  $S(n)$  duyarlı birey sayısı için minimum değer  $t = 0$  anında 68.28 ,maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 498.5 olarak bulunmaktadır.

$D(n)$  komplikasyon olmayan diyabetikler için minimum değeri  $t = 0$  anında 2.588 maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 16.39 olarak bulunmaktadır.

$C(n)$  komplikasyon olan diyabetikler için minimum değeri  $t = 0$  anında 4.009 maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 24.76 olarak bulunmaktadır.



Şekil 2.23.(2.31) modelinin Runge-Kutta 3 yöntemi ile çözümleri

Tablo 2. 115. Stokastik Runge-Kutta 3 modelinin değişkenlerine ait bazı sayısal veriler

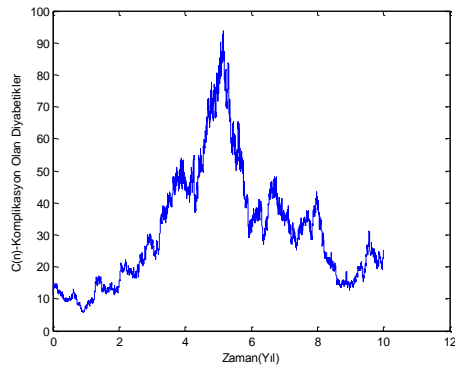
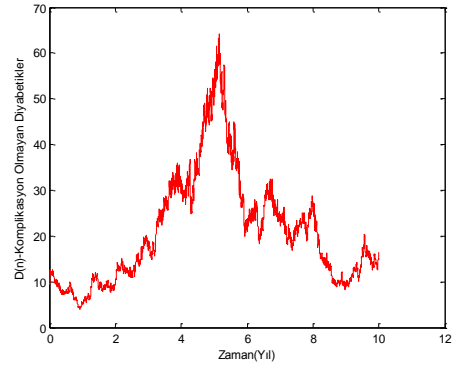
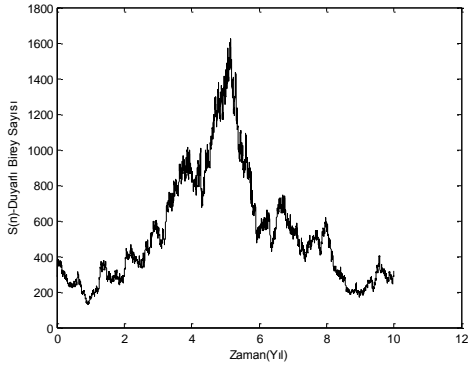
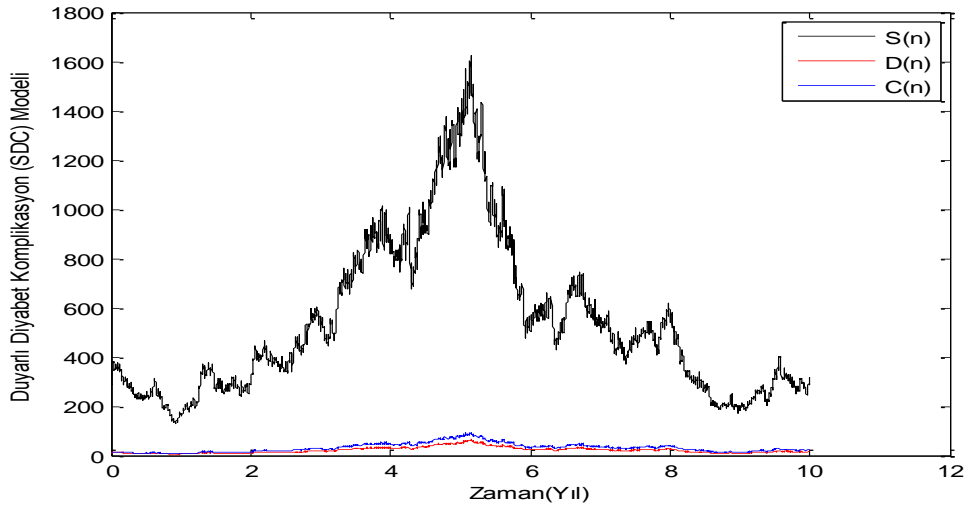
Değişken	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
$S(n)$	52	0	451.1	10
$D(n)$	2.224	0	16.34	10
$C(n)$	3.463	0	25.11	10

(2.31) modelinin Stokastik Runge-Kutta 3 yöntemiyle elde edilen bazı veriler Şekil 2.23 'de şu şekilde verilmiştir:  $S(n)$  duyarlı birey sayısı için minimum değer  $t = 0$  anında 52 ,maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 451.1 olarak bulunmaktadır.

$D(n)$  komplikasyon olmayan diyabetikler için minimum değeri  $t = 0$  anında 2.224 maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 16.34 olarak bulunmaktadır.

$C(n)$  komplikasyon olan diyabetikler için minimum değeri  $t = 0$  anında 3.463 maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 25.11 olarak bulunmaktadır.





Şekil 2. 24.(2.31) modelinin Runge-Kutta 4 yöntemi ile çözümleri

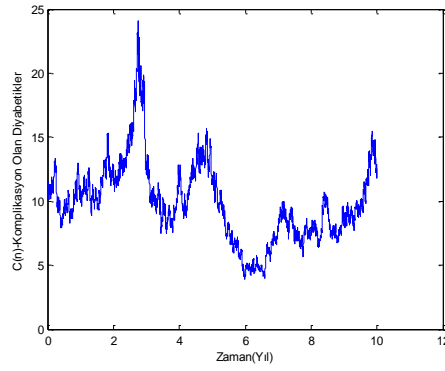
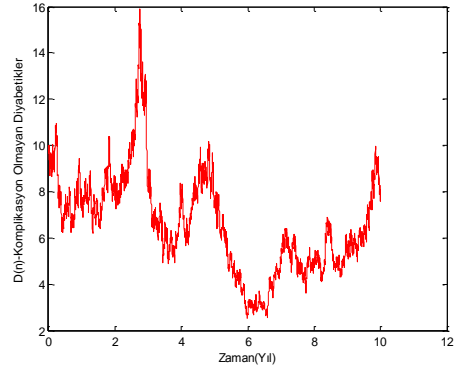
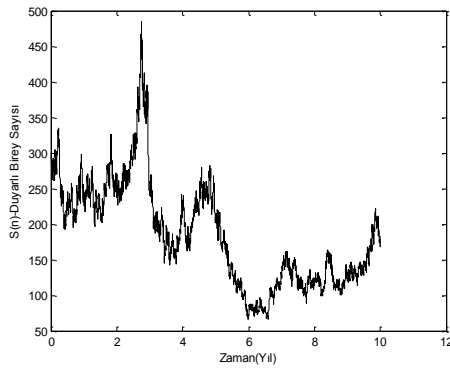
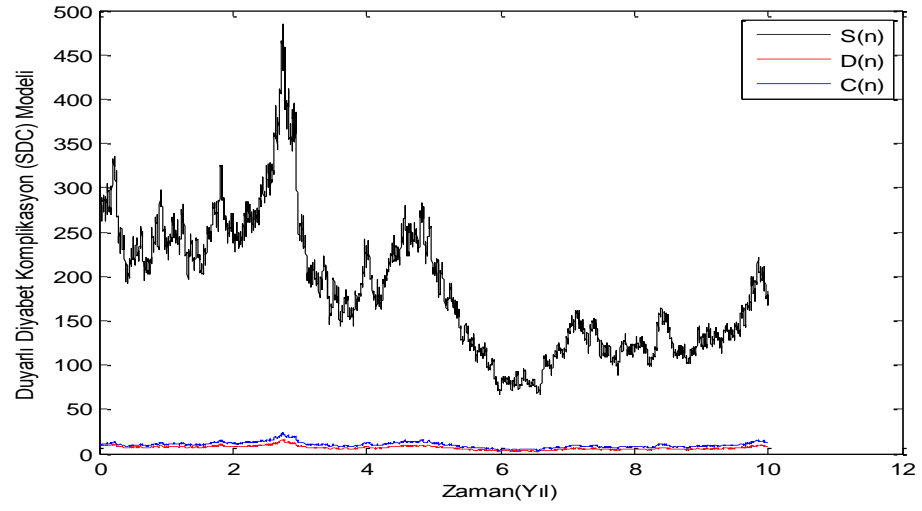
Tablo 2.116. Stokastik Runge-Kutta 4 modelinin değişkenlerine ait bazı sayısal veriler

Değişken	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
$S(n)$	127.7	0	1624	10
$D(n)$	4.051	0	64.38	10
$C(n)$	5.557	0	93.8	10

(2.31) modelinin Stokastik Runge-Kutta 4 yöntemiyle elde edilen bazı veriler Şekil 2.24 'de şu şekilde verilmiştir:  $S(n)$  duyarlı birey sayısı için minimum değer  $t = 0$  anında 127.7 ,maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 1624 olarak bulunmaktadır.

$D(n)$  komplikasyon olmayan diyabetikler için minimum değeri  $t = 0$  anında 4.051 maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 64.38 olarak bulunmaktadır.

$C(n)$  komplikasyon olan diyabetikler için minimum değeri  $t = 0$  anında 5.557 maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 93.8 olarak bulunmaktadır.



Şekil 2.25.(2.31) modelinin Runge-Kutta 5 yöntemi ile çözümleri

Tablo 2.117. Stokastik Runge-Kutta 5 modelinin değişkenlerine ait bazı sayısal veriler

Değişken	Minimum	Zaman	Maksimum	Zaman
$S(n)$	66.32	0	484.3	10
$D(n)$	2.51	0	15.91	10
$C(n)$	3.89	0	24.05	10

(2.31) modelinin Stokastik Runge-Kutta 5 yöntemiyle elde edilen bazı veriler Şekil 2.25 'de şu şekilde verilmiştir:  $S(n)$  duyarlı birey sayısı için minimum değer  $t = 0$  anında 66.32 ,maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 484.3 olarak bulunmaktadır.

$D(n)$  komplikasyon olmayan diyabetikler için minimum değeri  $t = 0$  anında 2.51 maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 15.91 olarak bulunmaktadır.

$C(n)$  komplikasyon olan diyabetikler için minimum değeri  $t = 0$  anında 3.89 maksimum değeri ise  $t = 10$  anında 24.05 olarak bulunmaktadır.

### 3. BULGULAR

Bu çalışmada Hill ve ark. tarafından sürekli zaman denklemleri kullanarak oluşturulan Duyarlı Diyabet Komplikasyon modelini (SDC) incelenerek sisteminin davranışlarını kesikli zaman ve rastgele fark denklem sistemi haline getirilerek incelendi.

Burada ilk olarak olası etkileşim sayısını belirlemek için bireyler üzerindeki duyarlı birey sayısı oluşturulmuştur. Biyolojik olarak şeker hücresi anlamlı olabilmesi için pozitifliği ve sınırlı olduğu durumlar araştırılmıştır. Modelin denge noktaları bulunmuş ve hastalıksız denge noktasına bağlı olarak şeker hücresinin temel üreme sayısı olan  $R_0$  bulunarak global kararlılık durumu incelenmektedir.

Duyarlı diyabet komplikasyon modeli (SDC) rastgele etkiler altında incelenmesi için Düzgün, Binom, Geometrik, Hipergeometrik ve Poisson dağılımlarına sahip rastgele etki terimleri kullanılmıştır. Rastgele modelin incelenmesi için MATLAB paket programı kullanılarak olasılık denkleminin simülasyon sonuçlarını beklenen değer, varyans, standart sapma, varyasyon katsayısı ve güven aralıkları incelenmiştir. Bu sayısal değerler için minimum ve maksimum değerleri tablolarla ve grafiklerle verilmiştir. Sürekli zaman dağılımı olan Normal dağılım ve kesikli zaman dağılımını olan Düzgün dağılımlarla ilgili olan deterministik sonuçlar karşılaştırılmıştır.

SDC modelinin davranışlarını modellemek adı altında fark denklem sistemlerine stokastik gürültü ekleyerek elde edilen stokastik ayrık zamanlı SDC modeli ile rastgele SDC modelinin sonuçları karşılaştırılmıştır. Stokastik etki terimlerinin eklenmesiyle oluşan stokastik model Euler-Mauyama, Milstein, Runge-Kutta gibi sayısal yöntemler yardımıyla çözümler elde edilmiştir.

#### 4. İRDELEME

Yapılan bu çalışmada literatürdeki model çalışmaları incelenerek ve varsayımlar kullanılarak oluşturulan Ayrık Zamanlı Duyarlı Diyabet Komplikasyon Modelinin Deterministik ve Rastgele analizi yapılmıştır. Ayrık Zamanlı Duyarlı Diyabet Komplikasyon Modeli kesikli zaman dağılımları kullanarak şeker hastaları üzerinde nasıl bir etki bıraktığını incelemek için birtakım bilgiler verilmektedir.

Olası etkileşim sayısını belirlemek için bireyler üzerindeki duyarlı birey sayısını oluşturulan modelin temel üreme sayısının ( $R_0$ ) bulunması şeker hastalarının lojistik büyümeye bağlı olarak sağlıklı hücreleri etkileyip etkilemediğine yönelik sonuçlar elde edilmiştir. Bulunan  $R_0$  değeri hastalıksız dengenin global kararlılığı hakkında yorum yapmamızı sağlamıştır. Stokastik gürültü ekleyerek modelin ve parametrelerin rastgele davranışları için oluşturulan rastgele modelin literatürde verilen stokastik süreçler kullanılarak yapılan analizlerin hızlı ve basit bir şekilde sonuçların elde edilmesini sağlamıştır. Stokastik etki sonucunda oluşan sonuçları Euler-Mauryama, Milstein, Runge-Kutta yöntemleri kullanılarak stokastik çözümler elde edilmiştir.

## 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada Duyarlı diyabet komplikasyonu (SDC) modelini ayrıklaştırılarak ayırık zamanlı bir model elde edildi ve elde edilen bu modele farklı dağılımlara sahip rastgele etkiler altında incelenmesi sonucunda Ayırık Zamanlı Duyarlı Diyabet komplikasyon modelinin rastgele etkileri adına yeni bir model literatüre kazandırılmıştır.

SDC modelinden elde edilen değişkenlerin pozitifliği ve sınırlılığı ispatlanmıştır. Hastaliksız denge noktalarının global kararlılığını incelemek için temel üreme (çoğalma) sayısı  $R_0 = \frac{\alpha\rho}{\mu+\lambda-1}$  olarak bulunmuş, modelin denge noktası  $R_0 < 1$  olduğunda kararlı,  $R_0 > 1$  olduğunda ise kararsız olduğu gösterilmektedir. Bunun yanı sıra modelin global kararlılığı incelenmiş ve kararlı olduğu ( $R_0 < 1$ ) şartı altında gösterilmiştir.

Duyarlı diyabet komplikasyonu (SDC) modelinde verilen bilimsel parametrelerde temel üreme sayısı hesaplandığında  $R_0 = -0.0040$  değeri bulunmaktadır.  $R_0 < 1$  olduğunda model denge noktasında kararlıdır.

SDC modelinin parametre değerlerini kesikli zamanlı dağılımlar olan Düzgün, Binom, Geometrik, Hipergeometrik ve Poisson dağılımlara sahip rastgele etkiler altında incelenmiştir. Hem sürekli hem de kesikli zaman olan Düzgün dağılım sonuçları karşılaştırılmıştır. Düzgün dağılıma sahip rastgele etkiler altında sürekli zamanlı dağılım kesikli zamanlı dağılımında elde edilen sonuçların daha yüksek değerli olduğu gözlemlenmiştir.

SDC modelindeki diferansiyel denklem sistemini ayrıklaştırılarak oluşturulan fark denklem sistemine Stokastik gürültü terimi eklenerek Stokastik fark denklem sistemi oluşturulmaktadır. Modelin sayısal çözüm yöntemleri için Stokastik Euler-Maruyama, Stokastik Euler-Milstein, Stokastik Runge-Kutta 2, Stokastik Runge-Kutta 3, Stokastik Runge-Kutta 4, Stokastik Runge-Kutta 5 yöntemleri kullanılmaktadır ve sonuçlar grafiklerle gösterilmektedir.

## **6. ÖNERİLER**

SDC modelinde kullanılan olasılık dağılımlarını çeşitlendirilerek rastgele modelin üzerindeki etkisi incelenebilir.

SDC modelinde kesikli türev Riemann-Liouville ve Caputo seçilerek rastgele kesikli türevli model analiz edilebilir. Ayrıca sabit ve oransal gecikme terimi ekleyerek elde edilen gecikmeli SDC modelinin davranışları incelenebilir.



## 7. KAYNAKLAR

- Aboutaleb M.T., El-Sayed, M. A. ve Hamza A.E., 2001. Stability of the recursive sequence  $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + x_{n-1}}$ , Journal of Mathematical Analysis and Applications, 261,126-133.
- Ackerman, E., Gatewood, I., Rosevear, J. ve Molnar, G., 1969. Blood glucose regulation and diabetes, Concepts and Models of Biomathematics, F. Heinmets, Ed., Marcel Decker, 131-156, New York.
- Agarwal, R.P., 2000. Difference Equations and Inequalities. Marcel Dekker, 970, New York.
- Akdeniz, F., 2014. Olasılık ve İstatistik, Akademiyen Kitabevi, Ankara, Türkiye.
- Amleh, A.M., Grove E.A. ve Ladas, G., 1999. On the Recursive Sequence  $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ , Journal of Mathematical Analysis and Applications, 233,790-798.
- Anaç, H., Merdan, M. ve Bekiryazıcı, Z., 2019. Global Stability In A Pathogen-Specific Cd8 Immune Response Prediction Model, Sigma J Eng & Nat Sci, 10 (3), 2019, 325-342.
- Appleby, J.A.D. ve Kelly, C., 2006. Oscillation of solutions of a nonuniform discretisation of linear stochastic differential equations with vanishing delay, Dy Contin Discret Impuls Syst A, 13B, 535-550.
- Appleby, J.A.D., Berkolaiko, G., Rodkina, A., 2009. Non-exponential stability and decay rates in nonlinear stochastic difference equations with unbounded noise, Stochastic, 81(2), 99-127.
- Appleby, J.A.D., Rodkina A. Ve Schurz, H., 2010a. Non-positivity and oscillations of solutions of nonlinear stochastic difference equations with state-dependent noise, J Differ Equ Appl, 6(7), 807-830.
- Appleby, J.A.D., Kelly, C., Mao, X., Rodkina, A., 2010b. On the local dynamic of polynomial difference equations with fading stochastic perturbations, Dy Contin Discret Impuls Syst A, 17(3), 401-430.
- Boutayeb, A., Twizell, E. H., Achouayb, K. ve Chetouani, A., 2004. BioMedical Engineering Online 3, 20.
- Calbo, G., Cortés, J.C. ve Jódar, L., 2010. Mean Square Power Series Solution Of Random Linear Differential Equations, Computers And Mathematics With Applications, 59, 559-572.

- Casabán, M.C., Cortés, J.C., Romero, J.V. ve Roselló, M.D., 2014. Probabilistic solution of random homogeneous linear second-order difference equations. Applied Mathematics Letters 34, 27–32.
- Centers for Disease Control ve Prevention (CDC), 2015. National Data of Diabetes.
- Cortés, J.C., Jódar, L. ve Villafuerte, L., 2007. Mean Square Numerical Solution Of Random Differential Equations: Facts And Possibilities, Computers And Mathematics With Applications, 53, 1098-1106.
- Cortés, J.C., Jódar, L. ve Villafuerte, L., 2007. Numerical Solution Of Random Differential Equations: A Mean Square Approach, Mathematical And Computer Modelling, 45, 757-765.
- Cortés, J.C., Jódar, L. ve Villafuerte, L., 2009. Random Linear-Quadratic Mathematical Models: Computing Explicit Solutions and Applications, Mathematics and Computers in Simulation, 79, 2076-2090.
- Cortés, J.C., Jódar, L., Villanueva, R.J. ve Villafuerte, L., 2010. Mean Square Convergent Numerical Methods For Nonlinear Random Differential Equations. Lecture Notes In Computer Science.
- Cortés, J.C., Jódar, L., Villafuerte, L. ve Company, R., 2011. Numerical Solution Of Random Differential Models, Mathematical And Computer Modelling, 54, 1846-1851.
- Cushing, J., 1999. An Introduction to Structural Population Dynamics, SIAM, Philadelphia.
- Cushing, J., ve Henson, S., 2001. Global dynamics of some periodically forced, monotone difference equations, J. Difference Equ. Appl., 7(6), 859-872.
- Çınar, C., 2003. On the difference equation  $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{-1+x_n x_{n-1}}$ , Applied Mathematics and Computation, 150 (1), 21-24.
- DeVault R., Kosmala R., Ladas G. ve Schultz S. W., 2001. Global Behavior of  $y_{n+1} = p + \frac{y_{n-k}}{qy_n + y_{n-k}}$ , Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 47, 4743-4751.
- Douraki, M. J., Dehghan, M. ve Razzghi, M., 2006. On the higher order rational recursive sequence  $x_n = \frac{A}{x_{n-k}} + \frac{B}{x_{n-3k}}$ , Applied Mathematics and Computation, 173, 710- 723.
- Elaydi, S., 1996. An Introduction to Difference Equations, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York.

- Elaydi S., 2005. An Introduction to Difference Equations third edition, Springer, USA.
- El-Owaidy H.M., Ahmed A. M., ve Mousa M. S., 2003. On the recursive sequences  $x_{n+1} = -\frac{\alpha x_{n-1}}{\beta} \pm x_n$ , Applied Mathematic and Computations, 145, 747-753.
- El-Owaidy H. M., Ahmed A. M. ve Mousa M., S., 2004. On asimptotic behavior of the difference equation  $\alpha x_{n-k}/x_n$ , Applied Mathematic and Computations, 147, 163-167.
- Fan Y., Wang L., ve Li W., 2004. Global behavior of a higher order nonlinear difference equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 299, 113-126.
- Feller W., 1968. An Introduction to Probability Theory and Its Applications, volume 1, 3rd edition. New York: John Wiley & Sons.
- Grad, T.C., 1988. Introduction to Stochastic Differential Equations, Marcel Dekker, 270 Madison Avenue, New York, 258p.
- Grove, E.A.ve Ladas, G., 2005. Periodicities in Nonlinear Difference Equations. Advances in Discrete Mathematics and Applications, Chapman & Hall, Boca Raton, Fla, USA.
- He W. S., ve Li W. T., 2004. Attractivity In A Nonlinear Delay Difference Equation, Appl. Math. E-Notes, 4, 48-53.
- Hill, J., Nielsen, M., ve Fox, M. H., 2013. Understanding the Social Factors That Contribute to Diabetes. A Means to Informing Health Care and Social Policies for the Chronically III, The Permanente Journal, 2, 67-72.
- Hu, L.X., Li, W.T., 2007. Global stability of a rational difference equation, Appl. Math. Comput., 190(2), 1322-1327.
- Jia, X.M., ve Hu, L.X., 2010. Global attractivity of a higher-order nonlinear difference equation, Appl. Math. Comput., 216(3), 857-861.
- Karatzas, I., Shreve, S., 1998. Brownian Motion and Stochastic Calculus, second ed., Springer.
- Murray, J.D., 2004. Matematical Biology. I: An Introduction, third ed., Springer.
- Kelly, C., ve Rodkina, A., 2009. Constrained stability and instability of polynomial difference equations with state-dependent noise, Discret Contin Dyn Syst B 11(4), 913-933.
- Kelly G. W., ve Peterson, C. A., 2001. Difference Equations: An Introduction with Applications, Academic Press, San Diego.

- Kloeden, P.E., ve Platen, E., 1992. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin.
- Kocic, V. and Ladas, G., 1993. Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Komsala W. A., Kulenovic M. R. S., Ladas G., ve Teixeira C. T., 2000. On the Recursive Sequence  $y_{n+1} = \frac{p+y_{n-1}}{qy_n+y_{n-1}}$ , Journal of Mathematical Analysis and Applications, 251, 571-586.
- Kulenovic, M. R. S., ve Kalabusic, S., 2000. Projects For The History of Difference Equations and Recursive Relations, University of Rhode Island.
- Kulenovic, M.R.S. ve Ladas, G., 2001. Dynamic of Second Order Rational Difference Equations, With Open Problems and Conjecture. Chapman & Hall, Boca Raton, Fla, USA.
- Mahata, A., Mondal, S.P., Alam, S. ve Roy, B., 2016. Mathematical Model Of Glucose- Insulin Regulatory System On Diabetes Mellitus In Fuzzy And Crisp Environment, Ecological Genetics and Genomics.
- Mao, X., 1997. Stochastic Differential Equations and Applications, Horwood Publishing Limited, second ed., Chichester.
- Merdan, M., Bekiryazici, Z., Kesemen, T. ve Khaniyev, T., 2017. Comparison of Stochastic and Random Models for Bacterial Resistance, Advances in Difference Equations, 133-152.
- Parsamanesh, M., 2020. A Family of Three-Stage Stochastic Runge-Kutta Methods With Order Two And Their Stability, Applied Mathematics and Physics, 82, 183-196.
- Peng, Y., 2006. Global Asymptotic Stability For Nonlinear Difference Equations. Appl. Math. Comput., 182(1), 67-72.
- Rosado, Y. C., 2009. mathematical model for Detecting Diabetes, Proceedings of The National Conference On Undergraduate Research (NCUR) 2009, University of Wisconsin LaCrosse La-Crosse, Wisconsin, April 16 – 18.
- Rugh, W., J., 1996. Linear System Theory, Prentice Hall.
- Sandefur, J., 1990. Discrete Dynamical Systems: Theory and Applications, Oxford University Press, Oxford.
- Sauer, T., 2012. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations in Finance, Handbook of Computational Finance, Springer, Berlin, Heidelberg, 529-550.

- Segre, G., Turco, G.L. ve Vercellone, G.V., Siena and Torino, 1973. Modelling Blood Glucose and Insuline Kinetics Normal, Diabetic and obsese Subjects, American Diabetes Association, 22(2), 94-103.
- Side,S.,Sanusi,W., Aidid, M.K. ve Sidjara,S., 2016. Global stability of SIR and SEIR model for tuberculosis disease transmission with Lyapunov function method, Asian Journal of Applied Sciences, 9(3),87-96.
- Soong, T.T., 1973. Random Differential Equations in Science and Engineering, Academic Press, New York.
- Sun, T., ve Xi, H., 2005. Global asymptotic stability of a family of difference equations. J. Math. Anal. Appl., 309(2), 724-728.
- Van den Driessche,P., 2017. Reproduction numbers of infectious disease models, Infectious Disease Modelling, 2, 288-303.
- Wang, C.Y., Wang, S., Wang, Z.W., Gong, F. ve Wang, R.F., 2010. Asymptotic stability for a class of nonlinear difference equations. Discrete Dyn. Nat. Soc., 1-10.
- Weisstein E., 1999. MathWorld, A Wolfram Web Resource, CRC Pres LLC.
- Widyaningsih,P.,Affan,R.C. ve Saputro, D.R.S., 2018. A Mathematical Model for The Epidemiology of Diabetes Mellitus with Lifestyle and Genetic Factors, IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1028-012110.
- Yang, X. , Lai, H. , Evans, D. J. ve Mebson, G. M., 2004, Global asymptotic stability in a rational recursive sequence, Applied Mathematics and Computation 158, 703- 716.

## **ÖZGEÇMİŞ**

Şeyma ŞİŞMAN 1995 yılında Gümüşhane’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Gümüşhane/Merkez Aysin Rafet Ataç İlköğretim Okulunda ve lise öğrenimini Gümüşhane/Merkez Gümüşhane Lisesinde tamamladı. 2014 yılında Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümünden mezun oldu. 2018 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı.

