



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**RASTGELE EFEKTLİ ADİ ve KISMİ KOMPLEKS DİFERENSİYEL
DENKLEMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve MERDAN

**TEMMUZ 2020
GÜMÜŞHANE**

**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**RASTGELE EFEKTLİ ADI ve KISMİ KOMPLEKS DİFERENSİYEL
DENKLEMLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve MERDAN

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

“Matematik Mühendisliği”

Yüksek Lisans Programında Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16.06.2020

Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 16.07.2020

TEMMUZ 2020

TEZ BEYANNAMESİ

Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlamış olduğum “Rastgele Efektli Adi Ve Kısmi Kompleks Diferensiyel Denklemler” isimli tez çalışmada; bütün bilgi ve belgeleri genel akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, görsel ve yazılı bütün bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak hazırlayıp sunduğumu, başka kaynaklardan yararlandığım bilgileri metin ve kaynaklarda eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksi durumda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 16/06/2020

Merve MERDAN

ÖZET
YÜKSEK LİSANS TEZİ

RASTGELE EFEKTLİ ADİ ve KİSMİ KOMPLEKS DİFERENSİYEL
DENKLEMLER

Merve MERDAN

Gümüşhane Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Rıdvan ŞAHİN

2020, 146 sayfa

Bu çalışmada, adi ve kısmi kompleks diferensiyel denklemlerin katsayıları, başlangıç koşulları ve kuvvet fonksiyonu rastgele değişken seçilerek denklemler rastgele hale getirilmiştir. Bu denklemlerin çözümleri için yarı analitik yöntemlerden diferensiyel, Elzaki ve Sumudu dönüşüm yöntemleri kullanılmıştır. Ayrıca, elde edilen rastgele adi ve kısmi kompleks diferensiyel denklemlerin çözümleri bulunarak, çözümlerin olasılık karakteristikleri incelenmiştir. Parametreler farklı olasılık dağılımlarından seçilerek, örneğin Beta, Gamma, Düzgün, Normal dağılım olması durumunda çözümlerin beklenen değer ve varyansları hesaplanarak, grafiksel olarak gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Adi ve Kompleks Diferensiyel Denklemler, Rastgele Diferensiyel Denklem, Beklenen Değer ve Varyans, Lane-Emden Denklemi

ABSTRACT

MS THESIS

ORDINARY and PARTIAL COMPLEX DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RANDOM EFFECTS

Merve MERDAN

Gümüşhane University

The Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematical Engineering

Supervisor: Assoc. Prof. Rıdvan ŞAHİN

2020, 146 pages

In this study, the coefficients, initial conditions and force function of the ordinary and partial complex differential equations have been randomized by selecting random variables. For the solutions of these equations, semi-analytical methods, differential, Elzaki and ternal Sumudu transform methods are used. In addition, by finding solutions of the obtained random ordinary and partial complex differential equations, probability characteristics of the solutions are examined. By selecting parameters from different probability distributions, for example in case of Beta, Gamma, Uniform and Normal distribution expected values and variances of the solutions are calculated and shown graphically.

Keywords: Ordinary and Complex Differential Equations, Random Differential Equation, Expected Value and Variance, Lane-Emden Equation

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Tez konusunun belirlenmesinde bana yardımcı olan bu çalışmanın yürütülmesinde değerli bilgilerini benimle paylaşan, kıymetli zamanını bana ayırıp desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, edindiği tecrübe ile bana büyük katkısı olan değerli danışmanım Doç. Dr. Rıdvan ŞAHİN, Prof. Dr. Mehmet MERDAN ve Dr. Öğr. Üyesi Zafer BEKİRYAZICI zamanlarını ayırarak, tezimin jürisine katılmışlar , tezi geliştirici fikir ve öneriler getirmişlerdir. Yüksek Lisans öğrenimi boyunca, maddi ve manevi anlamda bana desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkür ederim.

Merve MERDAN

Gümüşhane, 2020

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET	IV
ABSTRACT	V
TEŞEKKÜR	VI
İÇİNDEKİLER.....	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XII
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Temel Tanımlar	3
1.3. Adi Kompleks Diferansiyel Denklemler Teorisi	4
1.4. Adi Kompleks Diferansiyel Denkleminin Analitik Çözümü	6
1.4.1. Birinci Mertebeden Adi Lineer Kompleks Diferansiyel Denklemler	6
1.4.2. n 'inci Mertebeden Lineer Kompleks Diferansiyel Denklemler: n . Mertebeden Lineer Adi Kompleks Diferansiyel Denklemin Genel Şekli	8
1.4.3. Lineer Rastgele Kompleks Diferansiyel Denklemler	8
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	10
2.1. Sumudu Dönüşümü.....	10
2.2. Bazı Temel Fonksiyonların Sumudu Dönüşümleri.....	10
2.3. Sumudu Dönüşümünün Varlığı	12
2.4. Sumudu Dönüşümünün Özellikleri.....	13
2.5. Laplace-Sumudu Dönüşümü ve Karmaşık Sumudu Dönüşüm Formülü.....	19
2.6. Lineer Rastgele Kompleks Diferansiyel Denklemlerin Sumudu Yöntemi ile Çözülmesi.....	22
2.7. Cauchy-Euler Adi Kompleks Diferansiyel Denklemler.....	33
3. Lineer Adi Kompleks Rastgele Diferansiyel Denklemlerin Seri Çözümleri.....	44
3.1. Adi ve Tekil Noktalar	44
4. İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Seri Çözümleri.....	46
4.1. Frobenius Yöntemi.....	60

5.	Bir Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi	80
5.1.	Lineer Olmayan Fonksiyonlar İçin Diferensiyel Dönüşüm Metodu	80
5.2.	Lane-Emden Rastgele Kompleks Diferensiyel Denklemler.....	82
5.3.	Kompleks Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Sumudu Yöntemleri ile Çözümü ...	97
5.3.1.	İki Boyutlu Sumudu Dönüşümü	97
5.3.2.	Birinci Mertebeden Sabit Katsayılı Kompleks Diferensiyel Denklemlerin Sumudu Dönüşüm Yöntem Çözümü	103
5.5.	İki Boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi	109
6.	Birinci Mertebeden Lineer Rastgele Kompleks Diferensiyel Denklemler.....	110
7.	Kompleks Türevler	129
7.2.	Elzaki Dönüşümü	130
7.3.	Elzaki Dönüşümünün Özellikleri	130
7.4.	Birinci Mertebeden Sabit Katsayılı Kompleks Diferensiyel Denklemlerin Elzaki Dönüşüm Yöntem Çözümü.....	131
8.	BULGULAR	140
9.	İRDELEME	141
10.	SONUÇLAR.....	142
11.	ÖNERİLER	143
12.	KAYNAKLAR.....	144
	ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 2. 1.	$\mu = 4, \sigma = 1$ değerleri için (2.24) denkleminin beklenen değeri	25
Şekil 2. 2.	$\mu = 4, \sigma = 1$ değerleri için (2.24) denkleminin varyansı.....	26
Şekil 2. 3.	$\alpha = 2, \beta = 3$ için (2.25) denkleminin beklenen değeri.....	29
Şekil 2. 4.	$\alpha = 2, \beta = 3$ değerleri için (2.25) denkleminin varyansı.....	29
Şekil 2. 5.	$\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (2.26) denkleminin beklenen değeri.....	32
Şekil 2. 6.	$\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (2.26) denkleminin varyansı.....	32
Şekil 2. 7.	$\alpha = 4, \beta = 2$ değerleri için (2.30) denkleminin beklenen değeri.....	36
Şekil 2. 8.	$\alpha = 4, \beta = 2$ değerleri için (2.30) denkleminin varyansı.....	37
Şekil 2. 9.	$\alpha = 1, \beta = 2$ için (2.31) denkleminin beklenen değeri.....	40
Şekil 2. 10.	$\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri (2.31) denkleminin varyansı	40
Şekil 2. 11.	$\alpha = 1, \beta = 2$ için (2.32) denkleminin beklenen değeri.....	43
Şekil 2. 12.	$\alpha = 1, \beta = 2$ için (2.32) denkleminin varyansı.....	44
Şekil 4. 1.	$\alpha = 2, \beta = 3$ için (4.3) denkleminin beklenen değeri	51
Şekil 4. 2.	$\alpha = 2, \beta = 3$ değerleri için (4.3) denkleminin varyansı.....	51
Şekil 4. 3.	$\alpha = 2, \beta = 3$ değerleri için (4.4) denkleminin beklenen değeri.....	56
Şekil 4. 4.	$\alpha = 2, \beta = 3$ değerleri için (4.4) denkleminin varyansı.....	57
Şekil 4. 5.	$\alpha = 2, \beta = 3$ değerleri için (4.5) denkleminin beklenen değeri	59
Şekil 4. 6.	$\alpha = 2, \beta = 3$ değerleri için (4.5) denkleminin varyansı.....	60
Şekil 4. 7.	$\alpha = 2, \beta = 1$ ve $\mu = 1, \sigma = 2$ değerleri için (4.22) denkleminin beklenen değeri.....	73
Şekil 4. 8.	$\alpha = 2, \beta = 1$ değerleri için (4.24) denkleminin beklenen değeri.....	76
Şekil 4. 9.	$\alpha = 2, \beta = 1$ değerleri için (4.24) denkleminin varyansı.....	77
Şekil 4. 10.	$\alpha = 3, \beta = 2$ ve $\mu = 1, \sigma = 2$ için (4.25) denkleminin beklenen değeri.....	79
Şekil 5. 1.	$\alpha = 1, \beta = 2$ için (5.18) denkleminin beklenen değeri.....	84
Şekil 5. 2.	$\alpha = 1, \beta = 2$ için (5.18) denkleminin varyansı	85
Şekil 5. 3.	$\mu = 1, \sigma = 2$ değerleri için (5.22) denkleminin beklenen değeri.....	87
Şekil 5. 4.	$\mu = 1, \sigma = 2$ değerleri için (5.22) denkleminin varyansı.....	87
Şekil 5. 5.	$\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (5.26) denkleminin beklenen değeri	89

Şekil 5. 6. $\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (5.26) denkleminin varyansı	90
Şekil 5. 7. $\alpha = 2, \beta = 1$ değerleri için (5.30) denkleminin beklenen değeri	93
Şekil 5. 8. $\alpha = 2, \beta = 1$ değerleri için (5.30) denkleminin varyansı	93
Şekil 5. 9. $\mu = 2, \sigma = 1$ değerleri için (5.34) denkleminin beklenen değeri.....	96
Şekil 5. 10. $\mu = 2, \sigma = 1$ değerleri için (5.34) denkleminin varyansı.....	96
Şekil 5. 11. $\mu = 2, \sigma = 1$ değerleri için (5.67) denkleminin beklenen değeri	105
Şekil 5. 12. $\mu = 2, \sigma = 1$ değerleri için (5.67) denkleminin varyansı.....	106
Şekil 5. 13. $\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (5.68) denkleminin beklenen değeri.....	108
Şekil 5. 14. $\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (5.68) denkleminin varyansı.....	108
Şekil 6. 1. $\mu = 3, \sigma = 2$ değerleri için (6.44) denkleminin beklenen değeri.....	118
Şekil 6. 2. $\mu = 3, \sigma = 2$ değerleri için (6.44) denkleminin varyansı.....	119
Şekil 6. 3. $\alpha = 4, \beta = 3$ değerleri için (6.63) denkleminin beklenen değeri	122
Şekil 6. 4. $\alpha = 4, \beta = 3$ değerleri için (6.63) denkleminin varyansı	122
Şekil 6. 5. $\alpha = 5, \beta = 6$ değerleri için (6.82) denkleminin beklenen değeri	125
Şekil 6. 6. $\alpha = 5, \beta = 6$ değerleri için (6.82) denkleminin varyansı	125
Şekil 6. 7. $\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (6.88) denkleminin beklenen değeri	129
Şekil 6. 8. $\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (6.88) denkleminin varyansı	129
Şekil 7. 1. $\alpha = 0, \beta = 1$ değerleri için (7.12) denkleminin beklenen değeri.....	136
Şekil 7. 2. $\alpha = 0, \beta = 1$ değerleri için (7.12) denkleminin varyansı.....	136
Şekil 7. 3. $\alpha = 1, \beta = 1$ değerleri için (7.14) denkleminin beklenen değeri.....	138
Şekil 7. 4. $\alpha = 1, \beta = 1$ değerleri için (7.14) denkleminin varyansı	139

TABLÖLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 2. 1. Bazı özel fonksiyonlar.....	21
Tablo 2. 2. Sumudu Dönüşümleri.....	21-22

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

DDY	: Diferansiyel dönüşüm yöntemi
SDY	: Sumudu dönüşüm yöntemi
EDY	: Elzaki dönüşüm yöntemi
AKDD	: Adi kompleks diferansiyel denklemler
KKDD	: Kısmi kompleks diferansiyel denklemler
LSY	: Laplace ve Sumudu yöntemi
\mathbb{C}	: Kompleks sayılar kümesi
\mathbb{R}^2	: İki boyutlu Öklid uzayı
w	: $w: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tanımlı bir kompleks fonksiyon
$F(s)$: Bir fonksiyonun Laplace dönüşümü
$\mathcal{L}[f(t)]$: $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$\mathcal{L}^{-1}[f(s)]$: $f(s)$ fonksiyonunun Ters Laplace dönüşümü
$G(u)$: Sumudu Dönüşümü
$\mathcal{S}[f(t); u]$: $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü
$\mathcal{S}^{-1}[Y(u)]$: Ters Sumudu dönüşümü
$\Gamma(n)$: Gamma Fonksiyonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Kompleks analiz ve diferansiyel denklemler modern fizik ve mühendislik modülasyonlarında ve özellikle kuantum mekaniği, akışkanlar mekaniği, nükleer fizik ve kompleks geometri uygulamalarında çok önemli bir role sahiptir. Gerçekte reel çizgideki diferansiyel denklemler hakkında literatürde çok fazla çalışma olmasına rağmen kompleks bağımlı ve bağımsız değişkenlere sahip diferansiyel denklemler için çok az çalışma literatürde mevcuttur. 1976 yılında kompleks bölgede adi diferansiyel denklemler (Sibuya, 1976) ve kompleks bölgede lineer diferansiyel denklemler üzerine çalışmalar yapılmıştır(Sibuya, 2008). Son yıllarda kompleks diferansiyel denklemler üzerine yapılan çalışmalar aşağıda özetlenmiştir. 2006 yılında, Taylor kollokasyon yöntemi ile bir dikdörtgensel bölgede kompleks diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmişlerdir(Sezer ve Gülsu, 2006). Eliptik bölgede karışık koşullu kompleks diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için Taylor kollokasyon yöntemi kullanılmıştır(Sezer v.d., 2006). 2013 yılında dairesel kompleks bölgede bazı kompleks diferansiyel denklemleri çözmek için kollokasyon yöntemini kullanmışlardır(Yüzbaşı ve Sezer, 2013). Sınırlı bölgede Ginzburg-Landau süper iletkenlik modelinde nicemlenmiş girdap etkileşimini incelenmiştir(Bao ve Tang, 2013). 2015 yılında bazı kompleks diferansiyel denklemlerin radikal çözümlerinin salınımları incelenmiştir(Huang ve Wang, 2015). 2017 yılında kuantum fizikçisi lineer kompleks diferansiyel denklemlerle Schrödinger denklemler arasında önemli bir ilişki olduğunu tespit etti(Jung ve Roh, 2017).

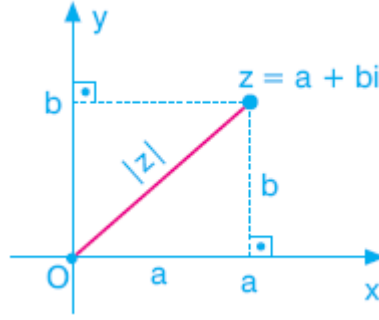
İlk olarak Zhou (1986) tarafından önerilen diferansiyel dönüşüm kavramı (bir boyutta) elektrik devresi analizinde lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlerini çözmek için uygulanmıştır. Tek boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini kullanarak doğrusal olmayan diferansiyel denklemler (Keskin ve Oturanç, 2008) de çözülmüştür. Ayrıca kompleks kısmi diferansiyel denklemler ele alındı, bu tür denklemler, ilk olarak lineer ve imajiner kısımlarına ayrılarak bağlı denklem sistemleri elde edildi. Elde edilen denklem sistemleri iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu uygulanarak yaklaşık analitik çözümü bulundu. Kısmi diferansiyel denklemlerin iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi ile çözülmesi Chen ve Ho (1999) tarafından önerilmiştir. Bu çalışmada, bazı adi

ve kompleks diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümleri Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi(DDY) kullanılarak analiz edilmiş ve diğer sayısal metotların çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Bu metot, bazı adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılabilir. Birinci bölümde, Diferansiyel Dönüşüm Yönteminin temel tanımı ve özellikleri verilmiştir. İkinci bölümde, örnekler diferansiyel dönüşüm yöntemi kullanılarak çözülmüş ve sayısal yöntemlerin diğer çözümleriyle karşılaştırılmıştır. Değişken katsayılı, birinci mertebeden Cauchy-Euler, Lane-Emden kompleks diferansiyel denklemler rastgele hale getirilerek çözüm davranışları incelenmiştir. Rastgele adi ve kısmi diferansiyel denklemler ilgili yapılan son çalışmalar, Merdan v.d tarafından 2017-2019 yılında gerçekleştirilmiştir. Kompleks adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözümleri verilmiştir(Düz, 2012-2014).

Sumudu Dönüşümü Yöntemi(SDY) temel tanım ve teoremleri verilmiştir. SDY ilk olarak G.K. Watugala tarafından 1993 yılında diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için verilmiştir. Bu çalışmada SDY' yi kullanarak adi ve kompleks diferansiyel denklemlerin çözümleri elde edilecektir(Belgacem ve Karaballi, 2003). Ayrıca Laplace dönüşümü ve özellikleri ele alınarak; Sumudu ve Laplace dönüşümleri arasındaki ilişki incelenmiştir. Özellikle birinci ve ikinci mertebeden kompleks diferansiyel denklemlere Sumudu dönüşümü uygulanarak çalışmanın amacına ulaşılması sağlanmıştır. Daha sonra MAPLE programlama dili ile bu denklemlerin üç boyutlu grafikleri çizilecektir. SDY çok fazla gelişmemesine rağmen son yıllarda uygulamalı bilimlerde özellikle mühendislik, fizik ve fizik bilimleri alanlarında önemli bir yer tutar. Elzaki dönüşümü(Elzaki T.M, Elzaki S.M ,2011), Tarig Elzaki tarafından 2011 yılında klasik Fourier integralinden türetilmiştir. Elzaki dönüşümünün matematiksel sadeliğine ve temel özelliklerine dayanmaktadır. Elzaki dönüşüm metodu kullanılarak lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler, kompleks adi ve kısmi diferansiyel denklemlerinin analitik çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen analitik çözümlerin MAPLE(v.13) paket programı kullanılarak beklenen değer ve varyans grafikleri çizilmiştir.

1.2. Temel Tanımlar

Kompleks Fonksiyon 1.1.1. $z = x + iy$ kompleks değişkeni \mathbb{R}^2 nin (Öklid uzayı) noktaları olarak gösterilmektedir. Böylece \mathbb{C} ’deki $z_0 = x_0 + iy_0$, \mathbb{R}^2 nin (x_0, y_0) noktasına karşılık gelmektedir. Bunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz:



Şekil 1.1 kompleks sayısı

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \equiv re^{i\theta}$$

buradan

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

$x = \text{Re}(z)$ (reel kısım), $y = \text{Im}(z)$ (sanal kısım) olarak adlandırılır. Ayrıca, $r = |z|$ z 'nin modülüdür (mutlak değeridir) ve $\theta = \arg(z)$, z 'nin bağımsız değişkenidir ve yalnızca 2π 'nin katlarına kadar belirlenmektedir.

Kuvvet Serisi 1.1.2. Kuvvet serileri, Weierstrass tarafından geliştirilen fonksiyon teorisinin temelini oluşturmuştur. Bu fonksiyonları icat etmemiş, ancak teorilerini mükemmelleştirmiştir. $z_0, a_n \in \mathbb{C}$ sabitler olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

biçimindeki serilere kuvvet serisi denir.

Laurent Serisi 1.1.3. f , $r < |z - z_0| < \mathcal{R}$ aralığında tanımlanan dairesel D bölgesi içinde analitik olsun. Bu aralıkta olan f 'in seri gösterimi aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

a_n katsayıları,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

γ , tamamen D bölgesinde yer alan ve içinde z_0 noktası bulunan basit bir kapalı eğridir.

Cauchy İntegralleri 1.1.4. $z \rightarrow f(z)$ fonksiyonunun bir D bölgesinde analitik olduğunu düşünelim.

$$f(z) = U(z) + iV(z)$$

ve integrali tanımlanırsa

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} [U dx - V dy] + i \int_{z_1}^{z_2} [U dy + V dx].$$

1.3. Adi Kompleks Diferansiyel Denklemler Teorisi

Bir karmaşık diferansiyel denklem, z_1, z_2, \dots, z_n kompleks değişkenler olmak üzere bir veya daha fazla bağımsız değişkene bağlı $w = F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ analitik kompleks fonksiyonun türevlerini içeren bir denklemdir.

Kompleks diferansiyel denklemin genel formu

$$F(z, w, w', w'', \dots, w^n) = 0,$$

standart adi kompleks diferansiyel denklem olarak adlandırılır. $w = F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ kompleks diferansiyel denkleminin bir çözümü olacaktır.

Tanım 1.3.1. Kompleks diferansiyel denklemin mertebesi, kompleks diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesidir.

Tanım 1.3.2. Kompleks diferansiyel denklemin derecesi, karmaşık diferansiyel denklemin en yüksek mertebeli türevin üssüdür.

Notasyon: Kompleks diferansiyel denklemin iki tipi vardır: Bunlar, adi kompleks diferansiyel denklem ve kısmi kompleks diferansiyel denklemlerdir.

1. Adi kompleks diferansiyel denklemler (AKDD'ler): Bir bağımlı ve bir bağımsız kompleks değişkene sahip denklemlerdir.
2. Kısmi kompleks diferansiyel denklemler (KKDD'ler): Birden fazla bağımsız kompleks değişkene sahip denklemlerdir.

Tanım 1.3.3. Adi kompleks diferansiyel denkleminin genel çözümü $w = F(z)$

$F(z, w, w') = 0$, AKDD sağlayan analitik fonksiyondur.

Tanım 1.3.4. Denklemini sağlayan, fakat genel çözümdeki keyfi sabitlere özel değerler verilerek elde edilemeyen çözümlere, tekil çözüm denir.

Tanım(Varlık ve Teklik) 1.3.5. Birinci mertebeden adi kompleks diferansiyel denklem düşünelim:

$$w'(z) = F(z, w),$$

ve $(z, w) \rightarrow f(z, w)$ 'nin (z_0, w_0) noktası komşuluğunda analitik olduğunu varsayalım. Yani, z değişkenli bir fonksiyonu $w = w(z; z_0; w_0)$ z_0 bazı komşuluğunda analitik olur ve $w_0 = (z_0, z_0 w_0)$ komşuluğundaki tüm z ler için

$$w'(z; z_0; w_0) = f(z, w(z; z_0; w_0)),$$

Cauchy böyle bir çözümün varlığını ve tekliğini göstermiştir. Bu amaçla, bazı özgün yollar geliştirilmiştir. Gerçek durum için, lineer yaklaşımlar kullanarak adım adım bir yöntem geliştirilmiştir.

1.4. Adi Kompleks Diferensiyel Denkleminin Analitik Çözümü

1.4.1. Birinci Mertebeden Adi Lineer Kompleks Diferansiyel Denklemler

$$\frac{dw}{dz} + P(z)w = Q(z), \quad (1.1)$$

şeklinde yazılmıştır. Burada $P(z)$ ve $Q(z)$ analitik fonksiyonlardır. (1.1) denklemini $v(z)$ ile çarpıldığında

$$v(z) \frac{dw}{dz} + v(z)P(z)w = v(z)Q(z)$$

elde edilir. $v(z)$ nin aşağıdaki denklemi sağladığını kabul edelim.

$$\frac{d}{dz} [v(z)w(z)] = v(z)Q(z),$$

her iki tarafın integrali alındığında

$$v(z)w(z) = \int v(z)Q(z)dz$$

ve

$$w = \frac{1}{v(z)} \int v(z)Q(z)dz$$

bulunur. Şimdi her bir (1.1) denklemi için $v(z)'$ yi bulmamız gerekir.

$$\frac{d}{dz} (vw) = v \frac{dw}{dz} + vPw,$$

eksik kalan kısım açıldığında

$$v \frac{dw}{dz} + w \frac{dv}{dz} = v \frac{dw}{dz} + vPw \Rightarrow wv' = vPw.$$

Bunu kolayca aşağıdaki gibi

$$v = e^{\int P(z)dz}$$

olduğu görülür. Buradan, genel çözüm

$$w = e^{-\int P(z)dz} \left[\int e^{\int P(z)dz} Q(z)dz + C \right]$$

elde edilir.

Örnek1.1. Aşağıda birinci mertebeden lineer adi kompleks diferensiyel denklemini inceleyelim.

$$w' + iw = z - i, \quad (1.2)$$

olup

$$P(z) = i, \quad Q(z) = z - i, \quad v = e^{\int idz}$$

ve

$$w = \frac{1}{e^{iz}} \int (z - i)e^{iz} dz \Rightarrow w = \frac{1}{e^{iz}} [-zie^{iz} + C]$$

böylece genel çözümü aşağıdaki forma sahiptir

$$w = Ce^{-iz} - zi.$$

1.4.2. n 'inci Mertebeden Lineer Kompleks Diferansiyel Denklemler: n . Mertebeden Lineer Adi Kompleks Diferansiyel Denklemin Genel Şekli

$$\sum_{k=0}^n f_k(z) w^{(k)}(z) = G(z),$$

burada $f_k(z)$ $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ karmaşık fonksiyonlar, polinomlar veya sabitlerdir. n . mertebeden lineer kompleks diferansiyel denklemleri(LKDD)

1. n 'inci mertebeden sabit katsayılı lineer adi kompleks diferansiyel denklemlerin standart şekli:

$$\sum_{k=0}^n a_k w^{(k)} = G(z),$$

burada a_k karmaşık sabitler ve $G(z) = 0$ ise denklem homojen,

2. Diğer durumda $G(z) \neq 0$ ise denklem homojen olmayandır.

1.4.3. Lineer Rastgele Kompleks Diferansiyel Denklemler

Lineer kompleks diferansiyel denklemler üç farklı şekilde rastgele hale getirilebilir.

1. Katsayıların rastgele hale getirilmesi:

$$\sum_{k=0}^n a_k w^{(k)} = G(z),$$

Burada a_k lar rastgele değişken olması durumunda yani, denklemin katsayıları rastgele yapılarak denklem rastgele kompleks diferansiyel denkleme dönüştürülebilir.

2. Başlangıç koşullarının rastgele hale getirilmesi:

$$\sum_{k=0}^n a_k w^{(k)} = G(z),$$

Başlangıç koşulları

$$w(0) = b_0, w'(0) = b_1, \dots, w^{(n-1)}(0) = b_{n-1},$$

b_0, b_1, \dots, b_{n-1} rastgele değişken seçilerek kompleks diferensiyel denklem rastgele hale getirilebilir.

3. Denklemin sağ tarafı olan kuvvet fonksiyonunun rastgele seçilmesi:

$$\sum_{k=0}^n a_k w^{(k)} = G(z),$$

$G(z)$ fonksiyonu rastgele seçilerek diferensiyel denklem rastgele hale getirilebilir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Sumudu Dönüşümü

$$A = \left\{ f(t) \mid \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{\tau_j}}, t \in (-1)^j x[0, \infty) \right\},$$

fonksiyonlar kümesi üzerinde

$$G(u) = \mathbb{S}[f(t)] = \int_0^\infty f(ut) e^{-t} dt, \quad u \in (-\tau_1, \tau_2) \quad (2.1)$$

dönüşümüne Sumudu dönüşümü denir (Belgacem vd., 2006)

2.2. Bazı Temel Fonksiyonların Sumudu Dönüşümleri

Öncelikle (2.1) ifadesinde $w = ut \left(t = \frac{w}{u} \right)$ dönüşümü uygulanırsa $dt = \frac{dw}{u}$ olacağından dönüşüm ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$G(u) = \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{w}{u}} f(w) dw \quad (2.2)$$

haline dönüşür. Dolayısıyla $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü,

$$G(u) = \mathbb{S}[f(t); u] = \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}} f(t) dt \quad (2.3)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu gösterim fonksiyonların Sumudu dönüşümünü elde etmemize yardımcı olmaktadır.

Örnek2.1. $f(t) = a, a$ sabit fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$\mathbb{S}[a] = \frac{1}{u} \int_0^\infty a e^{-\frac{t}{u}} dt$$

$$= a \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_0^A e^{-\frac{t}{u}} dt$$

$$= a \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \frac{1}{-\frac{1}{u}} e^{-\frac{t}{u}} \Big|_0^A$$

$$= a \lim_{A \rightarrow \infty} \left(1 - e^{-\frac{A}{u}} \right) = a$$

olacağından $\mathbb{S}^{-1}[a] = a$ bulunur.

Örnek 2.2. $f(t) = \cos(at)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$\mathbb{S}[f(t)] = \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}} \cos(at) dt$$

$$= \frac{1}{u} \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\cos(at) (-u) e^{-\frac{t}{u}} \Big|_0^A - \int_0^A (-u) e^{-\frac{t}{u}} (-a) \sin(at) dt \right]$$

$$= \frac{1}{u} \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\cos(aA) (-u) e^{-\frac{A}{u}} + u - au \int_0^A e^{-\frac{t}{u}} \sin(at) dt \right]$$

$$= \frac{1}{u} \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\cos(aA) (-u) e^{-\frac{A}{u}} + u - au \left(\sin(at) (-u) e^{-\frac{t}{u}} \Big|_0^A - \int_0^A (-u) e^{-\frac{t}{u}} a \cos(at) dt \right) \right]$$

$$= \frac{1}{u} \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\cos(aA) (-u) e^{-\frac{A}{u}} + u - au \left(\sin(aA) (-u) e^{-\frac{A}{u}} + au \int_0^A e^{-\frac{t}{u}} \cos(at) dt \right) \right]$$

$$= \frac{1}{u} \lim_{A \rightarrow \infty} \left[u - a^2 u^2 \int_0^A e^{-\frac{t}{u}} \cos(at) dt \right]$$

$$= 1 - a^2 u^2 \mathbb{S}[\cos(at)]$$

$$\mathbb{S}[\cos(at)] = 1 - a^2 u^2 \mathbb{S}[\cos(at)]$$

$$\mathbb{S}[\cos(at)] = \frac{1}{1+a^2 u^2}, \quad \mathbb{S}[\sin(at)] = \frac{au}{1+a^2 u^2}$$

şeklindedir.

2.3. Sumudu Dönüşümünün Varlığı

Teorem2.3.1. $f(t)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ve $t > t_0$ için α üstel mertebeden bir fonksiyon olsun. $\frac{1}{u} > \alpha$ olacağından $\mathbb{S}[f(t)]$ mevcuttur.

İspat: $\frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}} f(t) dt$ integralinin $\frac{1}{u} > \alpha$ için yakınsaklığının incelenmesi gerekmektedir.

$$\frac{1}{u} \int_0^\infty f(t) dt = \frac{1}{u} \int_0^{t_0} e^{-\frac{t}{u}} f(t) dt + \frac{1}{u} \int_{t_0}^\infty e^{-\frac{t}{u}} f(t) dt$$

şeklinde ayrılır. $e^{-\frac{t}{u}} f(t)$ ifadesi $[0, t_0]$ aralığında parçalı sürekli olduğundan sağ taraftaki ilk integral yakınsaktır. Buna göre ikinci integralin yakınsaklığı gösterilmelidir. $f(t)$ fonksiyonu α üstel mertebeden olduğundan $t \geq t_0$ için $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ ve tüm $t \geq t_0$ değerleri için,

$$\left| e^{-\frac{t}{u}} f(t) \right| = e^{-\frac{t}{u}} |f(t)| \leq M e^{-\frac{t}{u}} e^{\alpha t}$$

yazılabilir. $\frac{1}{u} > \alpha$ için,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t M e^{t(\alpha - \frac{1}{u})} dt &= \int_{t_0}^t M e^{-(\frac{1}{u} - \alpha)t} dt \\ &= M \int_{t_0}^\infty e^{-(\frac{1}{u} - \alpha)t} dt \\ &= M \frac{e^{-(\frac{1}{u} - \alpha)t_0}}{\frac{1}{u} - \alpha} < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $t \geq t_0$ için $\left| e^{-\frac{t}{u}} f(t) \right| \leq M e^{-\frac{t}{u}} e^{at} = M e^{-\left(\frac{1}{u}-a\right)t}$ olduğundan $\int_{t_0}^t e^{-\frac{t}{u}} f(t) dt$ integrali $\frac{1}{u} > a$ için yakınsaktır. Bundan dolayı her iki integral mevcut olduğundan $\mathbb{S}[f(t)]$ dönüşümü mevcuttur.

2.4. Sumudu Dönüşümünün Özellikleri

Teorem 2.4.1 $f(t) \in A$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$, Sumudu dönüşümü $G(u)$ olmak üzere,

$$G(u) = \frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{u} \quad (2.4)$$

olacak şekilde bir bağıntı vardır (Belgacem, F.B.M., Karaballi, A.A., ve Kalla, S.L., 2003).

İspat: $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.5)$$

olup (2.5) de $s = \frac{1}{u}$ alınırsa sağ taraftaki integral kısmın $F\left(\frac{1}{u}\right)$ olduğu açıktır.

$$G(u) = \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{u}} f(t) dt$$

$$= \frac{1}{u} F\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$= \frac{F\left(\frac{1}{u}\right)}{u}$$

eşitliği gerçekleşir.

Sonuç1. $x > 0$ ve $u = 1$ olmak üzere t^{x-1} fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$\begin{aligned} G(u) &= \mathbb{S}[t^{x-1}] \\ &= \Gamma(x)u^{x-1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklindedir.

İspat: $x > 0$ için

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

elde edilir ve bu ifadenin $s = 1$ için t^{x-1} fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{t^{x-1}\} = \Gamma(x) \quad (2.7)$$

olduğu görülür ve $u = s = 1$ için Sumudu ve Laplace dönüşümlerinin eşitliği sağlanmalıdır. Bundan dolayı integralin her iki tarafı $u = 1$ olacağından u^{x-1} ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} \Gamma(x)u^{x-1} &= \int_0^{\infty} u^{x-1} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} (ut)^{x-1} e^{-t} dt \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.4.2. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(u)$ olmak üzere

$$\mathbb{S}[e^{at} f(t)] = \frac{1}{1-au} G\left(\frac{u}{1-au}\right) \quad (2.8)$$

geçerlidir.

İspat:

$$\begin{aligned}\mathbb{S}[e^{at}f(t)] &= \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{u}} e^{at} f(t) dt \\ &= \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-t(\frac{1}{u}-a)} f(t) dt\end{aligned}$$

$t\left(\frac{1-au}{u}\right) = w$ dönüşümü yapılırsa $t = \frac{uw}{1-au}$ ve $dt\left(\frac{1-au}{u}\right) = dw$, $dt = \left(\frac{u}{1-au}\right) dw$ olacaktır.

$$\begin{aligned}\mathbb{S}[e^{at}f(t)] &= \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-w} f\left(\frac{uw}{1-au}\right) \left(\frac{u}{1-au}\right) dw \\ &= \frac{1}{1-au} \int_0^{\infty} e^{-w} f\left(\frac{uw}{1-au}\right) dw \\ &= \frac{1}{1-au} G\left(\frac{u}{1-au}\right)\end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 2.4.3. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $W(u)$ olsun. $f^{(n)}(t)f(t)'$ nin t' ye göre n . türevi; $W^{(n)}(u)$, $W(u)$ nun u' ya göre n . türevi olmak üzere $t^n f^{(n)}(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü,

$$\mathbb{S}[t^n f^{(n)}(t)] = u^n W^{(n)}(u) \quad (2.9)$$

şeklindedir (Belgacem, F.B.M., ve Karaballi, A.A., 2006).

İspat: $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $W(u)$ olmak üzere,

$$W(u) = \int_0^{\infty} f(ut)e^{-t} dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ için}$$

$$\begin{aligned}
W_n(u) &= \int_0^{\infty} \frac{d^n f(ut)}{du^n} e^{-t} dt \\
&= \int_0^{\infty} t^n f^{(n)}(ut) e^{-t} dt
\end{aligned}$$

eşitliğinin sağ tarafı u^n ile çarpılıp bölündüğünde,

$$\begin{aligned}
W_n(u) &= \frac{1}{u^n} \int_0^{\infty} u^n t^n f^{(n)}(ut) e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{u^n} \int_0^{\infty} (ut)^n f^{(n)}(ut) e^{-t} dt \\
&= \frac{1}{u^n} \mathbb{S}[t^n f^{(n)}(t)]
\end{aligned}$$

olur. Böylece eşitliğin her iki tarafı u^n ile çarpılırsa,

$$u^n W_n(u) = \mathbb{S}[t^n f^{(n)}(t)]$$

elde edilir.

Teorem2.4.4. Sumudu dönüşümü, kuvvet serisi fonksiyonunun katsayılarını güçlendirir,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \tag{2.10}$$

kuvvet serisi fonksiyonu göndererek,

$$G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n u^n. \quad (2.11)$$

İspat: $f(t)$, A kümesinde tanımlı olsun. Eğer

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

$I \subset \mathbb{R}$ aralığında, daha sonra Taylor'un fonksiyon genişleme teoremi ile

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n. \quad (2.12)$$

Bu nedenle, (1) ve Gamma fonksiyonunun Γ (bkz. tablo 2.1), elde ederiz.

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[f(t)] &= \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (ut)^k e^{-t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} u^k \int_0^{\infty} t^k e^{-t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} u^k \Gamma(k+1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) u^n. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sonuç olarak, belki de o zamandan beri

$$\mathbb{S}[(1+t)^m] = \mathbb{S} \sum_{n=0}^m C_n^m t^n$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{S} \sum_{n=0}^m \frac{m!}{n! (m-n)!} u^n \\
&= \sum_{n=0}^m \frac{m!}{(m-n)!} u^n \\
&= \sum_{n=0}^m P_n^m u^n,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Sumudu dönüşümü C_n^m 'yi permütasyonlara, P_n^m kombinasyonlarına gönderir ve bu yüzden ayrık sistemlere daha fazla düzen getirebilir. Ayrıca, $\mathbb{S}[f(t)]$ 'nin $u=0$ içeren bir aralığa yakınsamak şartıyla, aşağıdaki şartlar yerine getirildiğinde, yani

(i) $f^n(0) \rightarrow 0$ ve $n \rightarrow \infty$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(0)}{f^n(0)} u \right| < 1. \tag{2.15}$$

Bu $\mathbb{S}[f(t)]$ yakınsama yarıçapının $f^n(0)$ dizisine bağlı olduğu anlamına gelir,

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^n(0)}{f^{n+1}(0)} \right|. \tag{2.16}$$

Açıkça, Sumudu dönüşümü, özellikle orijinal sinyalin azalan bir güç kaynağına sahip olduğu durumlarda, bir sinyal işleme veya tespit aracı olarak kullanılabilir. Bununla birlikte, özellikle güç serileri aşırı derecede bozulmuyorsa özen gösterilmelidir. Bir sonraki örnek, belirtilen endişeyi öğretici bir şekilde gösterebilir. Örneğin,

$$f(t) = \begin{cases} \ln(t+1) & t \in (-1, 1], \\ 0 & \text{diğerleri} \end{cases}. \tag{2.17}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{t^n}{n} \right), \text{ den sonra } u = 0 \text{ için,}$$

$$\mathbb{S}[f(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (n-1)! u^n \quad (2.18)$$

yakınsama yarıçapı

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(-1)^n n!} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Teorem2.4.5. Ayırık durumda, orijinal işlevi verilen dönüşümden açıkça alması için şeffaf bir ters dönüşüm anlamına gelir.

Sonuç

Boş fonksiyonlara kadar, $G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n$ güç serisinin ters ayırık sumudu dönüşümü, $f(t)$,

$$\mathbb{S}^{-1}[G(u)] = f(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \right) b_n t^n.$$

2.5. Laplace-Sumudu Dönüşümü ve Karmaşık Sumudu Dönüşüm Formülü

Belgacem'de, Sumudu dönüşümünün, Laplace dönüşümünün teorik çifti olduğu gösterilmiştir. $Re(s) > 0$, için tanımlanmış, Laplace dönüşümü

$$F(s) = \vartheta(f(t))$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (2.21)$$

Sumudu ve Laplace dönüşümleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$G\left(\frac{1}{s}\right) = sF(s), \quad F\left(\frac{1}{u}\right) = uG(u). \quad (2.23)$$

(2.23) denkleminde, bundan sonra Laplace–Sumudu ikilisi için kısaca LSD olarak adlandırılacaktır, Sumudu ve Laplace dönüşümlerinin $\delta(t)$ fonksiyonunun ve $(\mathcal{H}(t))$ heaviside fonksiyonundan,

$$\mathbb{S}[\mathcal{H}(t)] = 1, \quad \mathbb{S}[\delta(t)] = \frac{1}{u} \quad (2.24)$$

olduğu bilinmektedir. Ayrıca, bu ikili benzer şekilde Sumudu ve Laplace, $\sin(t)$ ve $\cos(t)$ görüntülerindeki değişimini gösterir:

$$\mathbb{S}[\cos(t)] = \frac{1}{1+u^2}, \quad \mathbb{S}[\sin(t)] = \frac{u}{1+u^2}. \quad (2.25)$$

Bu aynı zamanda

$$\mathbb{S}[f'(t)] = \frac{\mathbb{S}[f(t)] - f(0)}{u}, \quad (2.26)$$

$$\mathbb{S}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = u\mathbb{S}[f(t)] \quad (2.27)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tablo 2.1. Bazı özel fonksiyonlar

Gamma fonksiyonu	$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-u} du, n > 0$
Beta fonksiyonu	$B(m, n) = \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{n-1} du = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$
Bessel fonksiyonu	$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} x \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} \right\}$
Modified Bessel fonksiyonu	$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$ $= \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} x \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\}$
Error fonksiyonu	$\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du$

Tablo 2.2. Sumudu Dönüşümleri

	$f(z)$	$G(u) = \mathbb{S}(f(z))$
1	1	1
2	z	u
3	$\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}, n = 1, 2, \dots$	u^{n-1}
4	$\frac{z^{n-1}}{\Gamma(n)}, n > 0$	u^{n-1}
5	e^{az}	$\frac{1}{1-au}$

Tablo 2.2. (Devamı)

6	$\frac{z^{n-1}e^{az}}{(n-1)!}, n = 1, 2, \dots$	$\frac{u^{n-1}}{(1-au)^2}$
7	$\frac{z^{n-1}e^{az}}{\Gamma(n)}$	$\frac{u^{n-1}}{(1-au)^2}$
8	$\frac{\sin az}{a}$	$\frac{u}{1+a^2u^2}$
9	$\cos az$	$\frac{1}{1+a^2u^2}$
10	$\frac{e^{bz}\sin az}{a}$	$\frac{u}{(1-bu)^2+a^2u^2}$
11	$e^{bz}\cos az$	$\frac{1-bu}{(1-bu)^2+a^2u^2}$
12	$\frac{\sinh az}{a}$	$\frac{u}{1-a^2u^2}$
13	$\cosh az$	$\frac{1}{1-a^2u^2}$
14	$\frac{e^{bz}\sinh az}{a}$	$\frac{u}{(1-bu)^2-a^2u^2}$

2.6. Lineer Rastgele Kompleks Diferensiyel Denklemlerin Sumudu Yöntemi İle Çözülmesi

Aşağıda ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan lineer denklemin başlangıç koşulları rastgele alınarak denklem rastgele KLDD hale dönüştürülerek Sumudu Yöntemi ile çözümü araştırılarak olasılık karakteristikleri incelenecektir.

Örnek 2.3.

$$w''(z) + w'(z) - 6w(z) = 3z^2 \quad (2.23)$$

$$w(0) = A, w'(0) = B$$

rastgele lineer kompleks diferensiyel denkleminin olasılık karakteristiklerini bulunuz. Burada başlangıç koşulları $A, B \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişkenlerdir.

Çözüm: Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{w(u)}{u^2} - \frac{w(0)}{u^2} - \frac{w'(0)}{u} + \frac{w(u)}{u} - \frac{w(0)}{u} - 6w(u) = 6u^2$$

verilen başlangıç değerleri yerine yazılırsa

$$w(u) \left(\frac{1+u-6u^2}{u^2} \right) = \frac{6u^4 + (A+B)u + A}{u^2}$$

$$w(u) = -u^2 - \frac{u}{6} - \frac{7}{36} + \frac{\left(A + B + \frac{13}{36}\right)u + A + \frac{7}{36}}{(1+u-6u^2)}$$

$$\frac{\left(A + B + \frac{13}{36}\right)u + A + \frac{7}{36}}{(1+3u)(1-2u)} = \frac{c_1}{1+3u} + \frac{c_2}{1-2u}$$

$$c_1 = -\frac{2A}{5} - \frac{B}{5} + \frac{2}{45}$$

$$c_2 = \frac{3A}{5} + \frac{B}{5} + \frac{3}{20}$$

bulunan c_1 ve c_2 değerleri yerine yazılırsa

$$w(u) = -u^2 - \frac{u}{6} - \frac{7}{36} + \frac{\frac{2A}{5} - \frac{B}{5} + \frac{2}{45}}{1 + 3u} + \frac{\frac{3A}{5} + \frac{B}{5} + \frac{3}{20}}{1 - 2u}$$

bulunan denklemin ters Sumudu dönüşümü alındığında

$$w(z) = -\frac{z^2}{2} - \frac{z}{6} - \frac{7}{36} + \left[\frac{2A}{5} - \frac{B}{5} + \frac{2}{45} \right] e^{-3z} + \left[\frac{3A}{5} + \frac{B}{5} + \frac{3}{20} \right] e^{2z}$$

elde edilir. $A, B \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise

$$M_z(t) = E[e^{tz}]$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2}.$$

$E[z] = \mu$, $E[z^2] = \mu^2 + \sigma^2$, $Var[w(z)] = \sigma^2$. $z \sim N(\mu, \sigma^2)$ olduğundan beklenen değeri

$$\begin{aligned} E[w(z)] &= E \left[-\frac{z^2}{2} - \frac{z}{6} - \frac{7}{36} + \left(\frac{2A}{5} - \frac{B}{5} + \frac{2}{45} \right) e^{-3z} + \left(\frac{3A}{5} + \frac{B}{5} + \frac{3}{20} \right) e^{2z} \right] \\ &= -\frac{z^2}{2} - \frac{z}{6} - \frac{7}{36} + e^{-3z} \left[\frac{2}{45} + \frac{2}{5} E[A] - \frac{1}{5} E[B] \right] + e^{2z} \left[\frac{3}{20} + \frac{3}{5} E[A] + \frac{1}{5} E[B] \right] \end{aligned}$$

$$E[w(z)] = -\frac{z^2}{2} - \frac{z}{6} - \frac{7}{36} + e^{-3z} \left[\frac{2}{45} + \frac{\mu}{5} \right] + e^{2z} \left[\frac{3}{20} + \frac{4\mu}{5} \right]$$

elde edilir. Varyans değeri ise

$$\begin{aligned} Var[w(z)] &= Var \left[\frac{2A}{5} e^{-3z} - \frac{B}{5} e^{-3z} \right] + Var \left[\frac{3A}{5} e^{2z} + \frac{B}{5} e^{2z} \right] \\ &= \frac{4}{25} e^{-6z} Var[A] + \frac{1}{25} e^{-6z} Var[B] + \frac{9}{25} e^{4z} Var[A] + \frac{1}{25} e^{4z} Var[B] \\ &= \frac{1}{5} e^{-6z} \sigma^2 + \frac{2}{5} e^{4z} \sigma^2 \end{aligned}$$

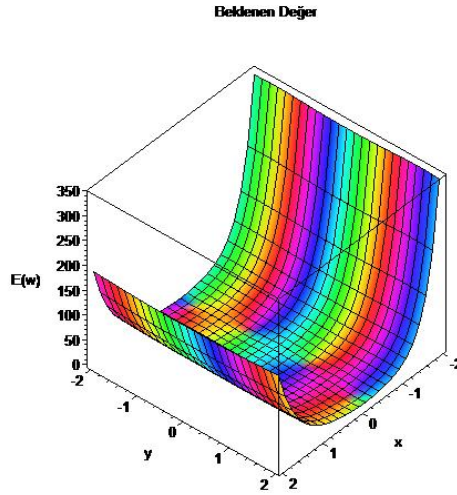
elde edilir. $A, B \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 1)$ özel değerleri için

$$\begin{aligned} E[w(z)] &= -\frac{z^2}{2} - \frac{z}{6} - \frac{7}{36} + e^{-3z} \left[\frac{2}{45} + \frac{\mu}{5} \right] + e^{2z} \left[\frac{3}{20} + \frac{4\mu}{5} \right] \\ &= -\frac{z^2}{2} - \frac{z}{6} - \frac{7}{36} + \frac{38}{45} e^{-3z} + \frac{67}{20} e^{2z} \end{aligned}$$

ve

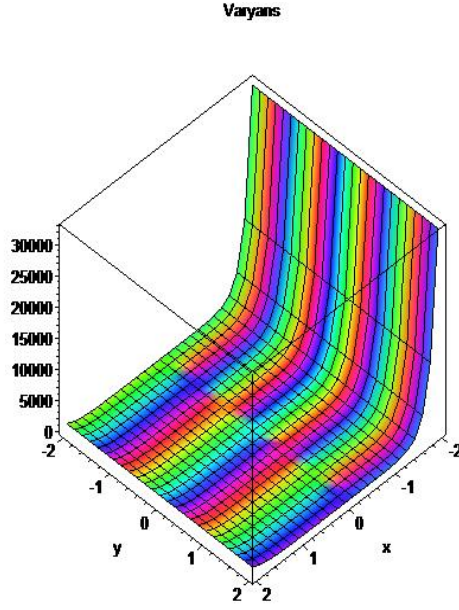
$$\begin{aligned} Var[w(z)] &= \frac{1}{5} e^{-6z} \sigma^2 + \frac{2}{5} e^{4z} \sigma^2 \\ &= \frac{1}{5} e^{-6z} + \frac{2}{5} e^{4z} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu değerlerin grafiksel gösterimi aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.1. $\mu = 4, \sigma = 1$ değerleri için (2.24) denkleminin beklenen değeri

ve



Şekil 2.2. $\mu = 4, \sigma = 1$ değerleri için (2.24) denkleminin varyansı

bulunur.

Örnek 2.4.

$$w''(z) + 2w'(z) + 5w(z) = A \sin(z) \quad (2.25)$$

$$w(0) = 1, \quad w'(0) = -1$$

rastgele lineer kompleks diferensiyel denkleminin olasılık karakteristiklerini bulunuz. Burada başlangıç koşulları $A \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ beta dağılıma sahip bağımsız rastgele değişkendir.

Çözüm: Verilen denklemin Sumudu dönüşümü alınırsa

$$\frac{w(u)}{u^2} - \frac{w(0)}{u^2} - \frac{w'(0)}{u} + 2 \frac{w(u)}{u} - 2 \frac{w(0)}{u} + 5w(u) = A \frac{u}{1+u^2}$$

başlangıç değerleri yerine yazılırsa

$$w(u) = \frac{(A+1)u^3 + u^2 + u + 1}{(1+u^2)(5u^2 + 2u + 1)}$$

denklemini basitleştirecek olursak

$$\begin{aligned} (A+3)u^3 + u^2 + u + 1 \\ = (B_1u + B_2)(5u^2 + 2u + 1) + (B_3u + B_4) + (B_3u + B_4)(u^2 + 1) \end{aligned}$$

$$5B_1 + B_3 = A + 1$$

$$2B_1 + 5B_2 + B_4 = 1$$

$$B_1 + 2B_2 + B_3 = 1$$

$$B_2 + B_4 = 1$$

$$B_1 = \frac{A}{5} , \quad B_2 = -\frac{A}{10} , \quad B_3 = 1 , \quad B_4 = 1 + \frac{A}{10}$$

elde edilir. Bulunan değerler yerine yazıldığında

$$w(u) = \frac{\frac{A}{5}u - \frac{A}{10}}{u^2 + 1} + \frac{u + (1 + \frac{A}{10})}{(1+u)^2 + 4u^2}$$

elde edilir. Ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$w(z) = \mathbb{S}^{-1}[w(u)]$$

$$= \frac{A}{5} \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{u}{u^2 + 1} \right] - \frac{A}{10} \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{1}{u^2 + 1} \right] + \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{u + 1}{(1+u)^2 + 4u^2} \right] + \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{\frac{A}{10}}{(1+u)^2 + 4u^2} \right]$$

$$w(z) = e^{-z} \left(-\frac{A}{20} \sin(2z) + \left(1 + \frac{A}{10} \right) \cos(2z) \right) - \frac{A}{10} (-2\sin z + \cos z)$$

bulunur. z beta dağılıma sahip rasgele değişkendir. $z \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ ve beta dağılımının moment çıkaran fonksiyonu

$$M_x(\alpha, \beta, t) = E[e^{tx}] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha + r}{\alpha + \beta + r} \right) \frac{t^k}{k!}$$

$$z \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \text{ ise } E[x] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \text{Var}(x) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$$

Bu momentler kullanılırken, x ve y bağımsız rasgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$, bu yaklaşık formüller kullanılarak, beklenen değer ve varyans, aşağıdaki gibi hesaplanabilir. Beklenen değeri,

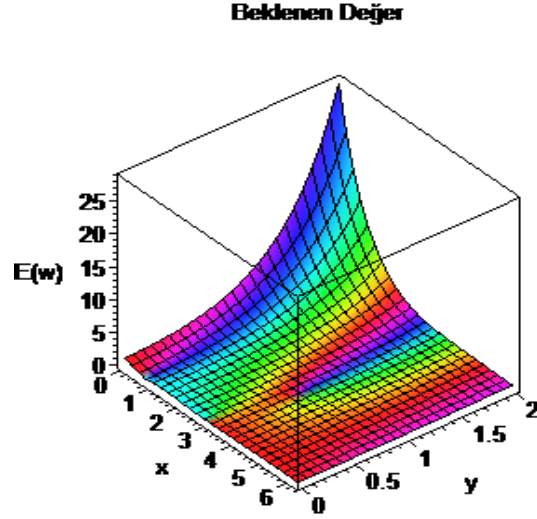
$$\begin{aligned} E[w(z)] &= e^{-z} \left(-\frac{E[A]}{20} \sin(2z) + \left(1 + \frac{E[A]}{10} \right) \cos(2z) \right) - \frac{E[A]}{10} (-2\sin z + \cos z) \\ &= e^{-z} \left(-\frac{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}}{20} \sin(2z) + \left(1 + \frac{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}}{10} \right) \cos(2z) \right) - \frac{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}}{10} (-2\sin z + \cos z). \end{aligned}$$

Varyansı,

$$\text{Var}[w(z)] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)} \left[\frac{e^{-2z}}{400} \sin^2(2z) + \frac{\cos^2(2z)}{100} + \left(\frac{2}{10} \sin z - \cos z \right)^2 \right].$$

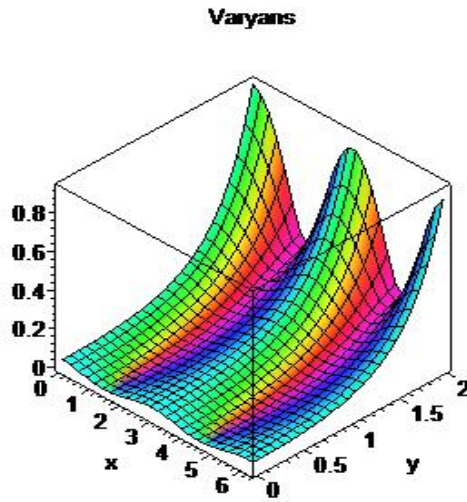
$A \sim \text{Beta}(\alpha = 2, \beta = 3)$ özel değerleri için,

$$E[w(z)] = e^{-z} \left(-\frac{1}{50} \sin(2z) + \frac{26}{25} \cos(2z) \right) - \frac{1}{25} (-2\sin z + \cos z)$$



Şekil 2.3. $\alpha = 2$, $\beta = 3$ için (2.25) denkleminin beklenen değeri

$$Var[w(z)] = \frac{1}{25} \left[\frac{e^{-2z}}{400} \sin^2(2z) + \frac{\cos^2(2z)}{100} + \left(\frac{2}{10} \sin z - \cos z \right)^2 \right]$$



Şekil 2.4. $\alpha = 2$, $\beta = 3$ değerleri için (2.25) denkleminin varyansı

bulunur.

Örnek 2.5.

$$w''(z) + 6w'(z) + 9w(z) = Ae^z + B\cos(z) \quad (2.26)$$

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 1$$

rastgele lineer kompleks diferensiyel denkleminin olasılık karakteristiklerini bulunuz. Burada başlangıç koşulları $A, B \sim G(\alpha, \beta)$ gamma dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişkenlerdir.

Çözüm:

$$\frac{w(u)}{u^2} - \frac{w(0)}{u^2} - \frac{w'(0)}{u} + \frac{6w(u)}{u} - \frac{6w(0)}{u} + 9w(u) = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u^2}$$

$$w(u) \left(\frac{1 + 6u + 9u^2}{u^2} \right) = \frac{A(1 + u^2) + B(1 - u)}{(1 - u)(1 + u^2)}$$

$$w(u) = \frac{A(u^2 + u^4) + B(u^2 - u^3)}{(1 - u)(1 + u^2)(1 + 6u + 9u^2)}$$

$$= \frac{D_1}{1-u} + \frac{D_2u + D_3}{1+u^2} + \frac{D_4}{3u+1} + \frac{D_5}{(3u+1)^2}$$

$$D_1 = \frac{A}{16}, \quad D_3 = \frac{2B}{25}, \quad D_2 = \frac{3B}{50}, \quad D_4 = -\frac{9B}{50} - \frac{7A}{48}$$

değerleri elde edilir.

$$w(z) = \mathbb{S}^{-1}[w(u)]$$

$$= \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{\frac{A}{16}}{1-u} \right] + \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{\frac{3B}{50}u + \frac{2B}{25}}{1+u^2} \right] + \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{-\frac{9B}{50} - \frac{A}{48}}{3u+1} \right] + \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{\frac{A}{12} + \frac{B}{10}}{(1+3u)^2} \right]$$

$$w(z) = e^{-3z} \left(-\frac{A}{16} - \frac{2B}{25} \right) + e^{-3z} z \left(1 - \frac{A}{4} - \frac{3B}{10} \right) + \frac{1}{16} Ae^z + \frac{2}{25} B\cos(z) + \frac{3}{50} B\sin(z)$$

elde edilir. $A, B \sim G(\alpha, \beta)$ gamma dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişken ve $\alpha = 4$ ve $\beta = 2$ olsun. Gamma dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha}$$

dir. $z \sim G(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri ve varyansı

$$E[x] = \alpha\beta, E[x^2] = (\alpha + \alpha^2)\beta^2 \quad \text{ve} \quad Var[x] = \alpha\beta^2$$

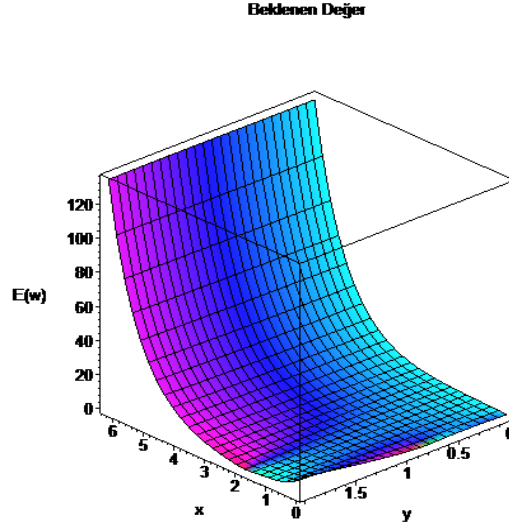
Bu momentler kullanılarak ve x ve y rasgele bağımsız değişken ise $E[x.y] = E[x]E[y]$ olduğundan, beklenen değer ve varyansın yaklaşık formülleri

$$\begin{aligned} E[w(z)] &= e^{-3z} \left(-\frac{E[A]}{16} - \frac{2E[B]}{25} \right) + e^{-3z} z \left(1 - \frac{E[A]}{4} - \frac{3E[B]}{10} \right) + \frac{1}{16} E[A] e^z \\ &\quad + \frac{2}{25} E[B] \cos(z) + \frac{3}{50} E[B] \sin(z) \\ &= e^{-3z} \left(-\frac{\alpha\beta}{16} - \frac{2\alpha\beta}{25} \right) + e^{-3z} z \left(1 - \frac{\alpha\beta}{4} - \frac{3\alpha\beta}{10} \right) + \frac{1}{16} \alpha\beta e^z + \frac{2}{25} \alpha\beta \cos(z) \\ &\quad + \frac{3}{50} \alpha\beta \sin(z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[w(z)] &= e^{-6z} \left(-\frac{Var[A]}{16^2} - \frac{4Var[B]}{25^2} \right) + e^{-6z} z^2 \left(-\frac{Var[A]}{4^2} - \frac{9Var[B]}{10^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{16^2} Var[A] e^{2z} + \frac{4}{25^2} Var[B] \cos^2(z) + \frac{9}{50^2} Var[B] \sin^2(z) \\ &= e^{-6z} \left(\frac{\alpha\beta^2}{16^2} + \frac{4\alpha\beta^2}{25^2} \right) + e^{-6z} z^2 \left(\frac{\alpha\beta^2}{16} + \frac{9\alpha\beta^2}{100} \right) + \frac{1}{16^2} \alpha\beta^2 e^{2z} + \frac{4}{25^2} \alpha\beta^2 \cos^2(z) \\ &\quad + \frac{9}{50} \alpha\beta^2 \sin^2(z). \end{aligned}$$

$z \sim G(\alpha = 1, \beta = 2)$ özel değerleri için beklenen değeri,

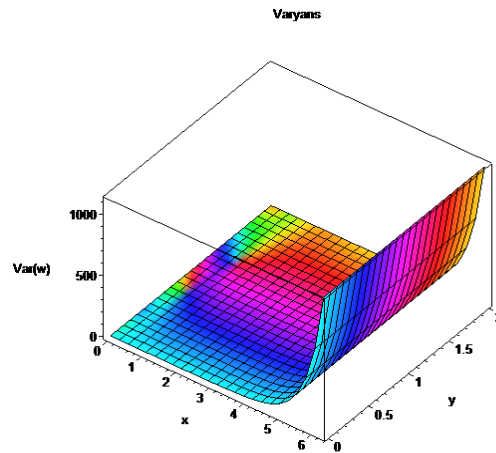
$$E[w(z)] = e^{-3z} \left(-\frac{57}{200} \right) + e^{-3z} z \left(-\frac{1}{10} \right) + \frac{1}{8} e^z + \frac{4}{25} \cos(z) + \frac{3}{25} \sin(z)$$



Şekil 2.5. $\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (2.26) denkleminin beklenen değeri

Varyansı,

$$\begin{aligned} Var[w(z)] = e^{-6z} \left(\frac{1}{16^2} + \frac{4}{25^2} \right) + e^{-6z} z^2 \left(\frac{1}{16} + \frac{9}{100} \right) + \frac{1}{16^2} e^{2z} + \frac{4}{25^2} \cos^2(z) \\ + \frac{9}{50^2} \sin^2(z). \end{aligned}$$



Şekil 2.6. $\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (2.26) denkleminin varyansı

2.7. Cauchy-Euler Adi Kompleks Diferensiyel Denklem

Bir lineer kompleks diferensiyel denklemi

$$a_n z^n \frac{d^n w}{dz^n} + a_{n-1} z^{n-1} \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \dots + a_1 z \frac{dw}{dz} + a_0 w = G(z), \quad (2.27)$$

katsayıları a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 sabit olup bu denklem Cauchy – Euler denklemi olarak bilinmektedir. Özel olarak $n = 2$ alınır

$$az^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + bz \frac{dw}{dz} + cw = 0,$$

homogen olmayan denklemi

$$az^2 w'' + b zw' + cw = G(z)$$

şeklinde gösterilir.

Çözüm Yöntemi: $w = z^m$ formunda çözümler arayalım (Sabit katsayılı lineer diferensiyel denklemi e^{mz}).

$$\begin{aligned} a_k z^k \frac{d^k w}{dz^k} &= a_k z^k (m(m-1)(m-2) \dots (m-(k-1)) z^{m-k}) \\ &= a_k m(m-1)(m-2) \dots (m-(k-1)) z^m \end{aligned} \quad (2.28)$$

$w = z^m$, ikinci mertebe denklemi yerine yazılırsa

$$az^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + bz \frac{dw}{dz} + cw = (a(m(m-1) + bm + c) z^m$$

buradaki $w = z^m$ ifadesinde m karmaşık diferensiyel denklemin bir çözümü olduğundan

$$am(m-1) + bm + c = 0 \quad \text{veya} \quad am^2 + (b-a)m + c = 0. \quad (2.29)$$

Örnek 2.6.

$$z^2 w''(z) + zw'(z) - 4w(z) = 4\ln z \quad (2.30)$$

başlangıç şartları

$$w(1) = A, \quad w'(1) = B$$

$A, B \sim G(\alpha, \beta)$ gamma dağılımına sahip birbirinden bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere, rastgele Cauchy-Euler adi kompleks diferensiyel denkleminin yaklaşık analitik çözümünü Sumudu dönüşümü ile elde ederek, olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm: $z = e^t$ olsun. $\ln z = t \Rightarrow \frac{dz}{z} = dt$ elde edilir.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z} \frac{dw}{dt},$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{1}{z^2} \left(\frac{d^2 w}{dt^2} - \frac{dw}{dt} \right)$$

olduğundan yerine yazıldığında,

$$\frac{d^2 w}{dt^2} - 4w = 4t$$

denklemine Sumudu dönüşümü uygulayalım.

$$\frac{w(u)}{u^2} - \frac{w(0)}{u^2} - \frac{w'(0)}{u} - 4w(u) = 4u \quad w(0) = A, w'(0) = B \text{ başlangıç değerleri}$$

yerine yazılırsa

$$w(u) \left(\frac{1}{u^2} - 4 \right) = 4u + \frac{A}{u^2} + \frac{B}{u}$$

$$w(u) = \frac{4u^3 + A + Bu}{1 - 4u^2}$$

elde edilir. Basit kesirlerine ayıracak olursak

$$w(u) \Rightarrow \frac{A + u(B + 1)}{1 - 4u^2} = \frac{A_1}{1 - 2u} + \frac{A_2}{1 + 2u}$$

$$A_1 = \frac{2A}{4} + \frac{B}{4} + \frac{1}{4} , \quad A_2 = \frac{2A}{4} - \frac{B}{4} - \frac{1}{4}$$

elde edilir.

$$w(u) = -u + \frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{4} + \frac{1}{4}}{1 - 2u} + \frac{\frac{A}{2} - \frac{B}{4} - \frac{1}{4}}{1 + 2u}$$

denklemine ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} w(t) &= \mathbb{S}^{-1}[-u] + \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{4} + \frac{1}{4}\right) \mathbb{S}^{-1}\left[\frac{1}{1 - 2u}\right] + \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{4} - \frac{1}{4}\right) \mathbb{S}^{-1}\left[\frac{1}{1 + 2u}\right] \\ &= e^{2t} \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{4} - \frac{1}{4}\right) e^{-2t} - t, \quad z = e^t \end{aligned}$$

olduğundan, böylece

$$w(z) = z^2 \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{4} - \frac{1}{4}\right)}{z^2} - \ln z$$

bulunur. $A, B \sim G(\alpha, \beta)$ gamma dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişken ve $\alpha = 4$ ve $\beta = 2$ olsun. Gamma dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha}$$

dir. $z \sim G(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri ve varyansı

$$E[x] = \alpha\beta, E[x^2] = (\alpha + \alpha^2)\beta^2 \quad \text{ve} \quad Var[x] = \alpha\beta^2$$

Bu momentler kullanılarak ve x ve y rasgele bağımsız değişken ise $E[x.y] = E[x]E[y]$ olduğundan, beklenen değer ve varyansın yaklaşık formülleri

$$E[w(z)] = z^2 \left(\frac{E[A]}{2} + \frac{E[B]}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\frac{E[A]}{2} - \frac{E[B]}{4} - \frac{1}{4}}{z^2} - \ln z$$

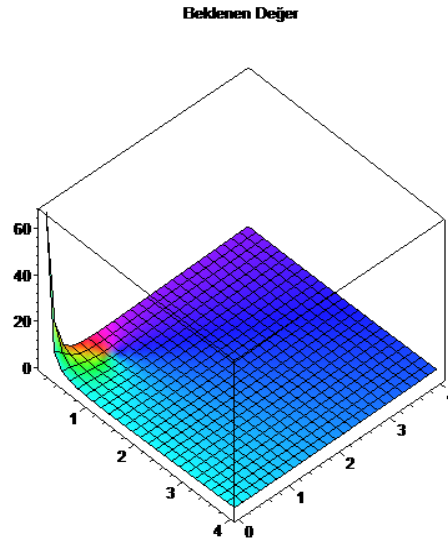
$$E[w(z)] = z^2 \left(\frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\alpha\beta}{4} + \frac{1}{4} \right) + \frac{\left(\frac{\alpha\beta}{2} - \frac{\alpha\beta}{4} - \frac{1}{4} \right)}{z^2} - \ln z$$

elde edilir.

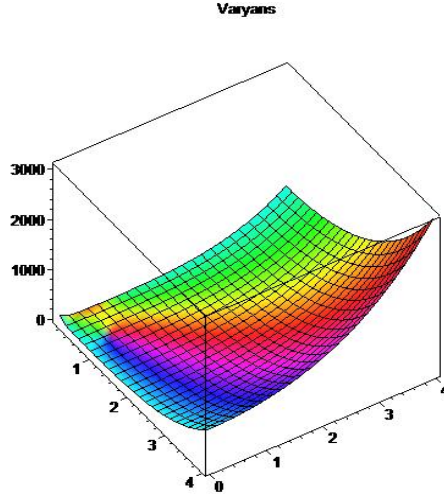
$$Var[w(z)] = \left[z^2 \frac{3Var[A]}{4} + \frac{Var[B]}{z^2} \right]$$

$$= z^4 \frac{3(\alpha\beta)^2}{16} + \frac{(\alpha\beta)^2}{16z^4}$$

Özel olarak, $\alpha = 4, \beta = 2$ seçilirse, $A, B \sim G(\alpha = 4, \beta = 2)$ için



Şekil 2.7. $\alpha = 4, \beta = 2$ değerleri için (2.30) denkleminin beklenen değeri



Şekil 2.8. $\alpha = 4$, $\beta = 2$ değerleri için (2.30) denkleminin varyansı

Örnek 2.7.

$$z^2 w''(z) + 5zw'(z) + 4w(z) = 3z^2 + 2\ln z \quad (2.31)$$

başlangıç şartları,

$w(1) = A$, $w'(1) = B$, $A \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ beta dağılımına sahip birbirinden bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere, rastgele Cauchy-Euler adi kompleks diferensiyel denkleminin yaklaşık analitik çözümünü Sumudu dönüşümü ile elde ederek, olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm: $z = e^t$ olsun. $\ln z = t \Rightarrow \frac{dz}{z} = dt$ elde edilir. $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z} \frac{dw}{dt}$, $\frac{d^2 w}{dz^2} =$

$\frac{1}{z^2} \left(\frac{d^2 w}{dt^2} - \frac{dw}{dt} \right)$ denklemleri yerine yazılırsa

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{4dw}{dt} + 4w = 3e^{2t} + 2t$$

$$w(0) = A, w'(0) = B$$

sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{w(u)}{u^2} - \frac{w(0)}{u^2} - \frac{w'(0)}{u} + 4 \left(\frac{w(u)}{u} - \frac{w(0)}{u} \right) + 4w(u) = \frac{3}{1-2u} + 2u$$

başlangıç şartları yerine yazılırsa,

$$w(u) = \frac{-4u^4 + 2u^3 + (-2(B + 4A) + 3)u^2 + (-2A + B + 4A)u + A}{(1 - 2u)(2u + 1)^2}$$

elde edilir. Basit kesirlerine ayrılırsa

$$\frac{(-2B - 8A)u^2 + \left(2A + B + \frac{1}{2}\right)u + A + \frac{1}{2}}{(1 - 2u)(2u + 1)^2} = \frac{E_1}{1 - 2u} + \frac{E_2}{2u + 1} + \frac{E_3}{(2u + 1)^2}$$

$$E_1 = \frac{3}{16}, E_2 = \frac{3}{16} + \frac{B}{2} + 2A, E_3 = -A - \frac{B}{2} + \frac{1}{8}$$

olur.

$$w(u) = \frac{u}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{16}}{1 - 2u} + \frac{\left(4A + B + \frac{3}{8}\right)u + 2A + \frac{B}{2} + \frac{3}{10} - A - \frac{B}{2} + \frac{1}{8}}{1 + 4u + 4u^2}$$

denkleminde ters Sumudu dönüşümü alınır

$$w(t) = \mathbb{S}^{-1}[w(u)]$$

$$= \left(A + \frac{5}{16}\right)e^{-2t} + te^{-2t} \left(B + 2A - \frac{1}{4}\right) + \frac{3e^{2t}}{16} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}$$

$$w(z) = \frac{A + \frac{5}{16}}{z^2} + \frac{\ln z \left(B + 2A - \frac{1}{4}\right)}{z^2} + \frac{3z^2}{16} + \frac{\ln z}{2} - \frac{1}{2}$$

bulunur. z Beta dağılıma sahip rasgele değişkendir. $z \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ ve Beta dağılımının moment çıkaran fonksiyonu

$$M_x(\alpha, \beta, t) = E[e^{tx}] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha + r}{\alpha + \beta + r} \right) \frac{t^k}{k!}$$

$$z \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \text{ ise } E[x] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \text{Var}(x) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$$

Bu momentler kullanılırken , x ve y bağımsız rasgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$, bu yaklaşık formüller kullanılarak, beklenen değer ve varyans, aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$E[w(z)] = \frac{1}{z^2} \left(E[A] + \frac{5}{16} \right) + \frac{\ln z \left(E[B] + 2E[A] - \frac{1}{4} \right)}{z^2} + \frac{3z^2}{16} + \frac{\ln z}{2} - \frac{1}{2}$$

$$E[w(z)] = \frac{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{5}{16}}{z^2} + \frac{\ln z \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} + 2 \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) - \frac{1}{4} \right)}{z^2} + \frac{3z^2}{16} + \frac{\ln z}{2} - \frac{1}{2}$$

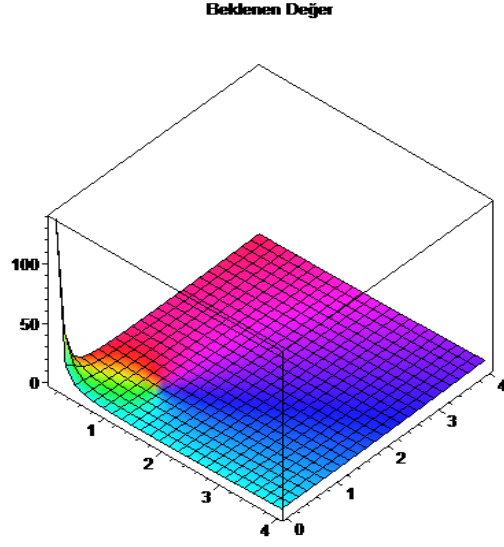
beklenen değeri elde edilir.

$$\text{Var}[w(z)] = \frac{1}{z^2} \left(\text{Var}[A] + \frac{5}{16} \right) + \frac{3z^2}{16}$$

$$= \frac{\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)} + \frac{5}{16}}{z^2} + \frac{3z^2}{16}$$

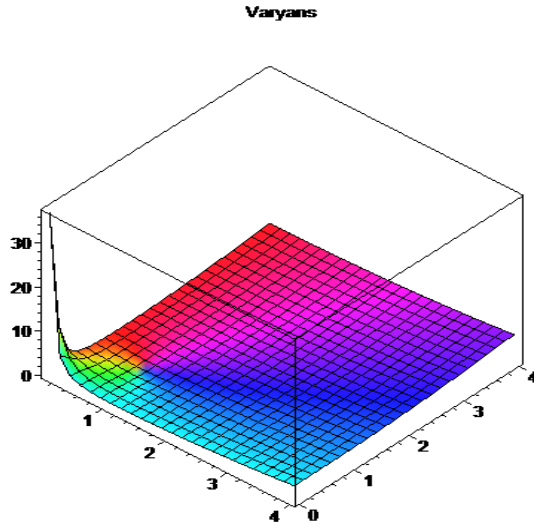
varyansı elde edilir. Özel olarak, $\alpha = 1, \beta = 2$ seçilirse, $A, B \sim \text{Beta}(\alpha = 1, \beta = 2)$ için

$$E[w(z)] = \frac{31}{48z^2} + \frac{\frac{\ln 3}{4}}{z^2} + \frac{3z^2}{16} + \frac{\ln z}{2} - \frac{1}{2}$$



Şekil 2.9. $\alpha = 1$, $\beta = 2$ için (2.31) denkleminin beklenen değeri

$$Var[w(z)] = \frac{1}{z^2} \frac{53}{144} + \frac{3z^2}{16}$$



Şekil 2.10. $\alpha = 1$, $\beta = 2$ değerleri (2.31) denkleminin varyansı

Örnek 2.8.

$$z^2 w''(z) - zw'(z) + 10w(z) = z \ln z \quad (2.32)$$

başlangıç değerleri

$$w(1) = A, w'(1) = B$$

$A, B \sim U(\alpha, \beta)$ düzgün dağılımına sahip birbirinden bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere, rastgele Cauchy-Euler adi kompleks diferensiyel denkleminin yaklaşık analitik çözümünü Sumudu dönüşümü ile elde ederek, olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm: $z = e^t$ olsun. $\ln z = t \Rightarrow \frac{dz}{z} = dt$ elde edilir. $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z} \frac{dw}{dt}$, $\frac{d^2w}{dz^2} =$

$\frac{1}{z^2} \left(\frac{d^2w}{dt^2} - \frac{dw}{dt} \right)$ denklemleri yerine yazılırsa

$$\frac{d^2w}{dt^2} - \frac{2dw}{dt} + 10w = e^t t$$

$$w(0) = A, w'(0) = B$$

Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{w(u)}{u^2} - \frac{w(0)}{u^2} - \frac{w'(0)}{u} - 2 \left[\frac{w(u)}{u} - \frac{w(0)}{u} \right] + 10w(u) = \frac{1}{1-u^2} u$$

denkleminde başlangıç değerleri yerine yazıldığında

$$w(u) = \frac{u^3 - (2A + B)u^2 - (A - B)u + A}{10u^2 - 2u + 1}$$

elde edilir. Basit kesirlerine ayrıldığında

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + B - 2A)u^3 + (5A - 2B)u^2 + (-4A + B)u + A}{(1 - u)^2(1 - 2u + 10u^2)} \\ &= \frac{E_1}{1 - u} + \frac{E_2}{(1 - u)^2} + E_3 u + \frac{E_4}{1 - 2u + 10u^2} \end{aligned}$$

paydalar eşitlenirse

$$E_1 = -\frac{1}{9}, E_2 = \frac{1}{9}, E_3 = -\frac{1}{9} + B - 2A, E_4 = A$$

olur.

$$w(u) = \frac{-\frac{1}{9}}{1-u} + \frac{\frac{1}{9}}{(1-u)^2} + \frac{\left(-\frac{1}{9} + B - 2A\right)u + A}{1-2u+10u^2}$$

denkleminde ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned} w(t) &= \mathbb{S}^{-1}[w(u)] \\ &= \mathbb{S}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{9}}{1-u}\right] + \mathbb{S}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{9}}{(1-u)^2}\right] + \mathbb{S}^{-1}\left[\frac{\left(-\frac{1}{9} + B - 2A\right)u + A}{1-2u+10u^2}\right] \end{aligned}$$

$$w(z) = z \sin(3 \ln z) \left(\frac{B}{3} - \frac{1}{27} - \frac{A}{3} \right) + z \cos(3 \ln z) A + \frac{1}{9} z \ln z$$

bulunur. A, B Düzgün dağılıma sahip rastgele değişken $A, B \sim U(\alpha, \beta)$ ve Düzgün dağılımın moment çıkaran fonksiyonu

$$M_{x(t)} = E[e^{tx}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t}$$

$z \sim U(\alpha, \beta)$ $E[x] = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $Var[x] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$ bu momentleri kullanırken, x ve y bağımsız rastgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$, bu yaklaşık formüller kullanılarak, beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi hesaplanabilir. $A, B \sim U(\alpha, \beta)$

$$E[w(z)] = z \sin(3 \ln z) \left(\frac{E[B]}{3} - \frac{1}{27} - \frac{E[A]}{3} \right) + z \cos(3 \ln z) E[A] + \frac{1}{9} z \ln z$$

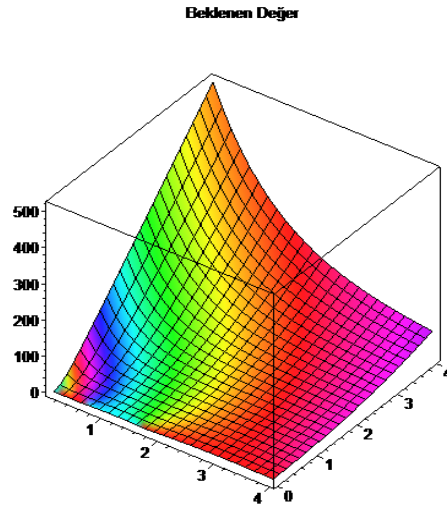
$$= z \sin(3 \ln z) \left(\frac{\frac{\alpha + \beta}{2}}{3} - \frac{1}{27} - \frac{\frac{\alpha + \beta}{2}}{3} \right) + (z \cos(3 \ln z)) \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{9} z \ln z$$

$$= -\frac{z \sin(3 \ln z)}{27} + (z \cos(3 \ln z)) \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \frac{1}{9} z \ln z$$

elde edilir.

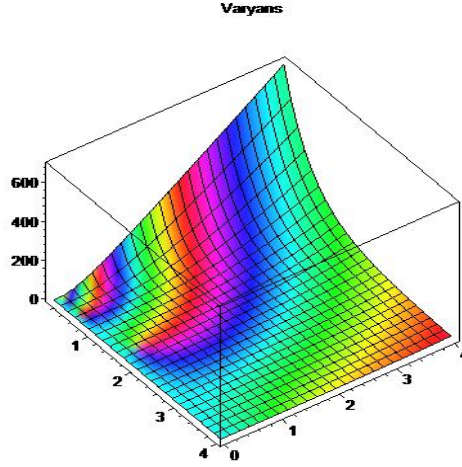
$$\text{Var}[w(z)] = (z \sin(3 \ln z))^2 \left[\frac{1}{9} \text{Var}[B] + \frac{1}{9} \text{Var}[A] \right] + (z \cos(3 \ln z))^2 \text{Var}[A]$$

bulunur. Özel olarak, $\alpha = 1, \beta = 2$ seçilirse, $A, B \sim U(\alpha = 1, \beta = 2)$ için



Şekil 2.11. $\alpha = 1$, $\beta = 2$ için
(2.32) denkleminin
beklenen değeri

$$\text{Var}[w(z)] = \frac{(z \sin(3 \ln z))^2}{54} + \frac{(z \sin(3 \ln z))^2}{12}$$



Şekil 2.12. $\alpha = 1, \beta = 2$ için (2.32) denkleminin varyansı

3. Lineer Adi Kompleks Rastgele Diferensiyel Denklemlerin Seri Çözümleri

Bu bölümde, ikinci mertebeden lineer kompleks adi diferensiyel denklemin kuvvet serisi çözümleri ele alınacaktır. Buradaki önemli nokta, ikinci mertebeden lineer kompleks denklemlerin seri çözümlerini, kompleks diferensiyel denklemin adi noktası merkezi kompleks sayı olan, bir Laurent serisi formunda bulunacaktır.

3.1. Adi ve Tekil Noktalar

$$a_2(z)w''(z) + a_1(z)w'(z) + a_0(z)w(z) = 0 \quad (3.1)$$

İkinci dereceden kompleks diferensiyel denklemini göz önünde bulunduralım. Bu denklem $a_2(z)$ ile bölünerek

$$w'' + P(z)w' + Q(z)w = 0 \quad (3.2)$$

denklemini elde edilir. (3.2) standart formdaki $P(z)$ ve $Q(z)$ katsayıları z_0 noktasında analitik ise $z = z_0$ noktasına (3.1) 'in bir adi noktası denir. Bir nokta, (3.1)'in adi noktası değil ise bu noktaya kompleks diferensiyel denklemin tekil noktası denir.

Notasyon: $a_2(z), a_1(z)$ ve $a_0(z)$ polinom olduklarından $z = z_0$ da $a_2(z) \neq 0$ ise , (3.1)'in adi noktasıdır. $a_2(z) = 0$ ise ayrıca $z = z_0$ noktası (3.1)'in tekil noktasıdır.

Teorem (Kuvvet Serisi Çözümlerinin Varlığı): $z = z_0$,(3.1) diferensiyel denkleminin bir adi noktası ise merkezi z_0 olan Laurent serisi formunda iki lineer bağımsız çözüm bulunabilir. Yani,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

$\left| \frac{1}{z - z_0} \right| < r^*$ yada eşdeğeri $|z - z_0| > \frac{1}{r^*} = r$ için yakınsayacaktır. $z - z_0$ ın pozitif olan kuvvetlerinden oluşan,

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

kısmına serinin analitik kısmı denir ve $|z - z_0| < R$ için yakınsaktır. Böylece $z, |z - z_0| > r$ ve $|z - z_0| < R$ yi aynı zamanda gerçekleştirdiğinde, yani $z, r < |z - z_0| < R$ ile tanımlanan halka bölgede bir nokta olduğundan yakınsamaktadır. Negatif ve negatif olmayan tamsayılar üzerinden toplam alınırsa,

$$w(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

şeklinde yazılabilir. Seride c_n katsayısı, Cauchy integral formülünün genelleştirilmesi ile

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

bir eğrisel integral olarak tanımlanır. Burada γ halka bölgede herhangi basit kapalı bir yol ve $f(z)$ analitik bir fonksiyondur.

$$w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

formundaki çözümün, z_0 adi noktası civarındaki bir çözümü olduğu söylenebilir.

4. İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Seri Çözümleri

z bağımsız değişken olmak üzere $a_2(z)$, $a_1(z)$ ve $a_0(z)$ fonksiyonları bir $A \subset \mathbb{R}$ alt aralığında sürekli fonksiyonlar olsun ve

$$a_2(z)w'' + a_1(z)w' + a_0(z)w = 0 \quad (4.1)$$

lineer adi kompleks diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $a_2(z)$, $a_1(z)$ ve $a_0(z)$ fonksiyonlarını birer polinom olarak alınacaktır.

Tanım 4.1.1. Bir $z_0 \in A$ sayısı verildiğinde, eğer $a_2(z_0) \neq 0$ oluyor ise z_0 noktasına (4.1) adi kompleks diferansiyel denkleminin bir adi noktasıdır, aksi halde bir tekil noktası denir. Eğer z_0 noktası (4.1) kompleks diferansiyel denkleminin bir adi noktası ise $a_2(z)$ sürekli olduğundan öyle bir $I \subset A$ alt aralığı bulunabilir ki bu alt aralıktaki her z noktası için $a_2(z) \neq 0$ olur. Dolayısıyla $z \in I$ için (4.1) adi kompleks denkleminin her iki tarafını $P(z)$ fonksiyonu ile bölebiliriz. Bu durumda (4.1) denklemini

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 4.1.2. Kabul edelim ki $p(z) = \frac{a_1(z)}{a_2(z)}$ ve $q(z) = \frac{a_0(z)}{a_2(z)}$ fonksiyonları z_0 noktasında analitik olsunlar, yani z_0 noktası (4.1) ile verilen

$$a_2(z)w'' + a_1(z)w' + a_0(z)w = 0$$

denkleminin bir adi noktası olsun. Bu durumda (4.1) denkleminin genel çözümü $w_1(z)$ ve $w_2(z)$ ler (4.1) denkleminin z_0 noktasında analitik lineer bağımsız çözümleri, a_0 ve a_1 ler keyfî sayılar olmak üzere

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$= a_0 w_1(z) + a_2 w_2(z)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca $w_1(z)$ ve $w_2(z)$ seri çözümlerinin yakınsaklık yarıçapı en fazla $p(z) = \frac{a_1(z)}{a_2(z)}$ ve $q(z) = \frac{a_0(z)}{a_2(z)}$ serilerinin yakınsaklık yarıçaplarının minimumu kadardır. Böylece işlemlerin daha kolay yürütebilmesi için $z_0 = 0$ alacağız. Eğer özel olarak $z_0 \neq 0$ ise (4.1) denkleminde $z - z_0 = t$ dönüşümü yapıp dönüşüme karşılık gelen denklemin $t = 0$ adi noktası komşuluğunda işlem yapılacaktır.

Tanım 4.1.3. Eğer z_0 noktası (4.2) adi kompleks diferensiyel denkleminin bir tekil noktası iken

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)p(z) = p_0 \quad \text{ve} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2 q(z) = q_0$$

Sonlu limitleri mevcut ise z_0 noktasına (4.2) adi kompleks diferensiyel denkleminin bir regüler tekil noktası diğer bir durumda irregüler tekil noktasıdır denir.

Örnek 4.1.

$$w'' - zw = 0, \tag{4.3}$$

$w(0) = A, w'(0) = B$ burada, $A, B \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ beta dağılımına sahip birbirinden bağımsız rastgele değişken olmak üzere, rastgele kompleks adi diferensiyel denkleminin kuvvet serisi çözümünü bularak, olasılık karakteristiklerini inceleyiniz.

Çözüm:

$$w(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

laurent serisi çözümünü elde edelim. Burada

$$w = \cdots + \frac{c_{-n}}{z^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

$$w' = \dots - \frac{c_{n-1}n}{z^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z^2} + c_1 + 2c_2z + \dots$$

$$w'' = \sum_{-\infty}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n-2}$$

verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n-2} - z \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n = 0$$

$$\sum_{-\infty}^{-3} (n+1)(n+2)c_{n+2} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} z^n - \sum_{-\infty}^{-3} c_{n-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1} z^n - c_{-3} z^{-2} - c_{-2} z^{-1} = 0$$

$$\sum_{-\infty}^{-3} [(n+1)(n+2)c_{n+2} - c_{n-1}] z^n - \frac{c_{-3}}{z^2} - \frac{c_{-2}}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)(n+2)c_{n+2} - c_{n-1}] z^n = 0$$

$$-c_{-3} - c_{-2} = 0, \quad (n+1)(n+2)c_{n+2} - c_{n-1} = 0 \Rightarrow c_{n+2} = \frac{c_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$$

$$n = -4 \text{ için } c_{-5} = 0$$

$$n = -5 \text{ için } c_{-6} = 0$$

$$n = 0 \text{ için } c_{-1} = 0$$

açıkça görüldüğü gibi $c_{-i} = 0$ olur ve şimdi $i = 1, 2, 3, \dots$ değerleri için bakalım:

$$n = 0 \text{ için } c_2 = 0,$$

$$n = 1 \text{ için } c_3 = \frac{c_0}{2.3},$$

$$n = 2 \text{ için } c_4 = \frac{c_1}{3.4},$$

$$n = 3 \text{ için } c_5 = 0,$$

$$n = 4 \text{ için } c_6 = \frac{c_0}{2.3.5.6},$$

$$n = 5 \text{ için } c_7 = \frac{c_1}{3.4.6.7},$$

$$n = 6 \text{ için } c_8 = 0,$$

$$n = 7 \text{ için } c_9 = \frac{c_0}{2.3.5.6.8.9},$$

$$n = 8 \text{ için } c_{10} = \frac{c_1}{3.4.6.7.9.10}$$

genel çözümde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} w(z) &= c_0 + c_1 z + \frac{c_0}{2.3} z^3 + \frac{c_0}{3.4} z^4 + \frac{c_0}{2.3.5.6} z^6 + \frac{c_1}{3.4.6.7} z^7 + \frac{c_0}{2.3.5.6.8.9} z^9 + \frac{c_1}{3.4.6.7.9.10} z^{10} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \frac{z^9}{2.3.5.6.8.9} + \dots \right) c_0 \\ &\quad + \left(z + \frac{z^4}{3.4} + \frac{z^7}{3.4.6.7} + \frac{z^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \dots \right) c_1 \\ &= c_0 w_1(z) + c_1 w_2(z) \end{aligned}$$

elde edilir. Başlangıç koşulları yerlerine yazılırsa,

$$w(0) = A \Rightarrow c_0 = A$$

$$w'(0) = B \Rightarrow c_1 = B$$

elde edilir. Başlangıç değer probleminin çözümü

$$\begin{aligned} w(z) &= \left(1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \frac{z^9}{2.3.5.6.8.9} + \dots \right) A \\ &\quad + \left(z + \frac{z^4}{3.4} + \frac{z^7}{3.4.6.7} + \frac{z^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \dots \right) B \end{aligned}$$

bulunur. Şimdide olasılık karakteristiklerini bulalım. İlk önce dağılım özelliklerini inceleyelim. z Beta dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere $z \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ ve Beta dağılımının moment çıkaran fonksiyonu

$$\begin{aligned} M_z(\alpha, \beta, t) &= E[e^{tz}] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha + r}{\alpha + \beta + r} \right) \frac{t^k}{k!} \\ z \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \text{ ise } E[z] &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \text{ Var}(z) = \frac{\alpha\beta}{((\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1))} \end{aligned}$$

Bu momentler kullanılırken, x ve y bağımsız rastgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$, bu yaklaşık formüller kullanılarak, beklenen değer ve varyans, aşağıdaki gibi hesaplanabilir. $w(z)$ denkleminin beklenen değeri,

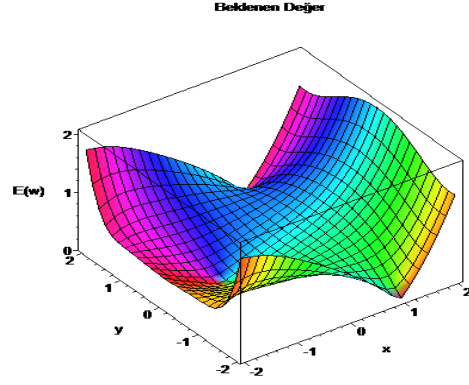
$$\begin{aligned}
E[w(z)] &= \left(1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \frac{z^9}{2.3.5.6.8.9} + \dots\right) E[A] \\
&\quad + \left(z + \frac{z^4}{3.4} + \frac{z^7}{3.4.6.7} + \frac{z^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \dots\right) E[B] \\
&= \left(1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \frac{z^9}{2.3.5.6.8.9} + \dots\right) \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} \\
&\quad + \left(z + \frac{z^4}{3.4} + \frac{z^7}{3.4.6.7} + \frac{z^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \dots\right) \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)}.
\end{aligned}$$

Varyansı

$$\begin{aligned}
Var[w(z)] &= \left(1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \frac{z^9}{2.3.5.6.8.9} + \dots\right) Var[A] \\
&\quad + \left(z + \frac{z^4}{3.4} + \frac{z^7}{3.4.6.7} + \frac{z^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \dots\right) Var[B] \\
&= \left(1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \frac{z^9}{2.3.5.6.8.9} + \dots\right) \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \\
&\quad + \left(z + \frac{z^4}{3.4} + \frac{z^7}{3.4.6.7} + \frac{z^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \dots\right) \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}
\end{aligned}$$

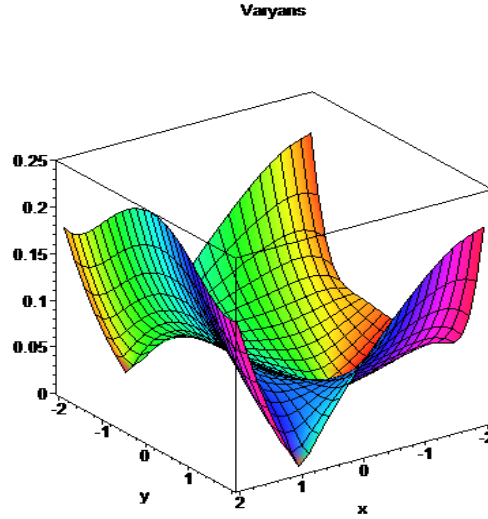
elde edilir. Özel olarak, $\alpha = 2, \beta = 3$ seçilirse, $A, B \sim Beta(\alpha = 2, \beta = 3)$ için

$$\begin{aligned}
E[w(z)] &= \left(1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \frac{z^9}{2.3.5.6.8.9} + \dots\right) \frac{2}{5} \\
&\quad + \left(z + \frac{z^4}{3.4} + \frac{z^7}{3.4.6.7} + \frac{z^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \dots\right) \frac{2}{5}
\end{aligned}$$



Şekil 4.1. $\alpha = 2$, $\beta = 3$ için (4.3) denkleminin beklenen değeri

$$\begin{aligned} Var[w(z)] = & \left(1 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^6}{2.3.5.6} + \frac{z^9}{2.3.5.6.8.9} + \dots \right) \frac{1}{25} \\ & + \left(z + \frac{z^4}{3.4} + \frac{z^7}{3.4.6.7} + \frac{z^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \dots \right) \frac{1}{25} \end{aligned}$$



Şekil 4.2. $\alpha = 2$, $\beta = 3$ değerleri için (4.3) denkleminin varyansı

Örnek 4.2.

$$(z^2 + 1)w'' + zw' - 2w = 0, \quad (4.4)$$
$$w(0) = A, w'(0) = B$$

burada, $A, B \sim G(\alpha, \beta)$ gamma dağılımına sahip birbirinden bağımsız rastgele değişken olmak üzere, rastgele kompleks adi diferensiyel denkleminin kuvvet serisi çözümünü bularak, olasılık karakteristiklerini inceleyiniz.

Çözüm: Denklemin her tarafını $\frac{1}{z^2+4}$ ile çarpalım.

$$w'' + \frac{z}{z^2 + 4}w' - \frac{2}{z^2 + 4}w = 0$$

$$P(z) = \frac{z}{z^2 + 4}, \quad Q(z) = -\frac{2}{z^2 + 4}$$

$$z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 = -4$$

$$z = \pm 2i$$

de tekil noktalar analitik değildir. O merkezli ve yakınsaklık bölgesi $0 < |z| < 1$ olan bir kuvvet serisi bulalım. Laurent serisinde negatif terimleri ihmal edelim.

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, w' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}, w'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n z^{n-2}$$

$$= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

denkleme yerine yazalım.

$$(z^2 + 4) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n z^{n-2} + z \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n z^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0$$

$$4.1.2c_2 + 4.2.3c_3z + c_1z - 2c_0 - 2c_1z$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)c_n + 4(n+1)(n+2)c_{n+2} + nc_n - 2c_n]z^n = 0$$

$$c_2 = \frac{c_0}{4}, c_3 = c_1/18$$

$$c_{n+2} = -\frac{(n^2-2)c_n}{4(n+1)(n+2)}$$

$$n = 2 \text{ için } c_4 = \frac{(-2)c_0}{4^3 \cdot 3},$$

$$n = 3 \text{ için } c_5 = \frac{(-7)c_1}{4^2 \cdot 5 \cdot 18},$$

$$n = 4 \text{ için } c_6 = \frac{(-14) \cdot (-2)c_0}{4^4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3},$$

$$n = 5 \text{ için } c_7 = \frac{(-23) \cdot (-7)c_1}{4^3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 18},$$

$$n = 6 \text{ için } c_8 = \frac{(-34) \cdot (-14) \cdot (-2)c_0}{4^5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3},$$

$$n = 7 \text{ için } c_9 = \frac{(-47) \cdot (-23) \cdot (-7)c_1}{4^4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 18},$$

$$n = 8 \text{ için } c_{10} = \frac{(-62) \cdot (-34) \cdot (-14) \cdot (-2)c_0}{4^6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 3},$$

bu değerler seride yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} c_0 + c_1z + \frac{c_0}{4}z^2 + \frac{c_1}{18}z^3 - \frac{2c_0}{4^3 \cdot 3}z^4 - \frac{7c_1}{4^2 \cdot 5 \cdot 18}z^5 + \frac{14 \cdot 2 \cdot c_0}{4^4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 3}z^6 + \frac{23 \cdot 7 \cdot c_1}{4^3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 18}z^7 \\ - \frac{34 \cdot 14 \cdot 2 \cdot c_0}{4^5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3}z^8 - \frac{47 \cdot 23 \cdot c_1}{4^4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 18}z^9 + \frac{62 \cdot 34 \cdot 14 \cdot 2 \cdot c_0}{4^6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 3}z^{10} + \dots = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$w(z) = c_0 \left(1 + \frac{z^2}{4} - \frac{2}{4^3 \cdot 3} z^4 + \frac{14.2}{4^4 \cdot 5.6.3} z^6 + -\frac{34.14.2}{4^5 \cdot 5.6.7.8.3} z^8 + \frac{62.34.14.2}{4^6 \cdot 5.6.7.8.9.10.3} z^{10} + \dots \right) + c_1 \left(z + \frac{z^3}{18} - \frac{7}{4^2 \cdot 5.18} z^5 + \frac{23.7}{4^3 \cdot 5.6.7.18} z^7 - \frac{47.23}{4^4 \cdot 5.6.7.8.9.18} z^9 + \dots \right)$$

$$w(0) = c_0 \Rightarrow c_0 = A$$

$$w'(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = B$$

değerleri yerine yazıldığında

$$w(z) = A \left(1 + \frac{z^2}{4} - \frac{2}{4^3 \cdot 3} z^4 + \frac{14.2}{4^4 \cdot 5.6.3} z^6 - \frac{34.14.2}{4^5 \cdot 5.6.7.8.3} z^8 + \frac{62.34.14.2}{4^6 \cdot 5.6.7.8.9.10.3} z^{10} + \dots \right) + B \left(z + \frac{z^3}{18} - \frac{7}{4^2 \cdot 5.18} z^5 + \frac{23.7}{4^3 \cdot 5.6.7.18} z^7 - \frac{47.23}{4^4 \cdot 5.6.7.8.9.18} z^9 + \dots \right)$$

bulunur. $A, B \sim G(\alpha, \beta)$ gamma dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişken ve Gamma dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_z(t) = E[e^{tz}] = \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha}$$

dir. $z \sim G(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri ve varyansı

$$E[z] = \alpha\beta, E[z^2] = (\alpha + \alpha^2)\beta^2 \quad ve \quad Var[z] = \alpha\beta^2$$

Bu momentler kullanılarak ve x ve y rasgele bağımsız değişken ise $E[x.y] = E[x]E[y]$ olduğundan, beklenen değer ve varyansın yaklaşık formülleri

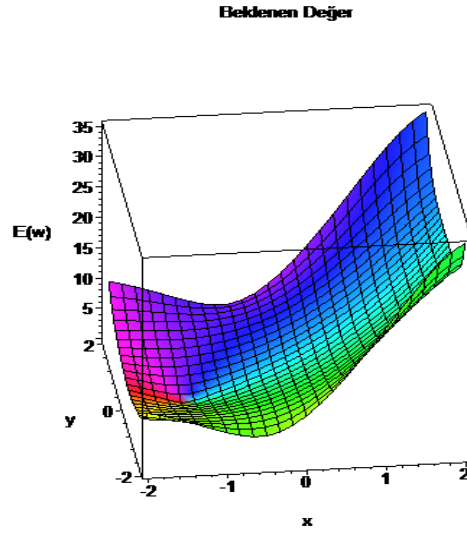
$$\begin{aligned}
E[w(z)] &= E[A] \left(1 + \frac{z^2}{4} - \frac{2}{4^3 \cdot 3} z^4 + \frac{14.2}{4^4 \cdot 5.6 \cdot 3} z^6 - \frac{34.14.2}{4^5 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 3} z^8 \right. \\
&\quad \left. + \frac{62.34.14.2}{4^6 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 3} z^{10} \right) + E[B] \left(z + \frac{z^3}{18} - \frac{7}{4^2 \cdot 5.18} z^5 + \frac{23.7}{4^3 \cdot 5.6 \cdot 7.18} z^7 \right. \\
&\quad \left. - \frac{47.23}{4^4 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 9 \cdot 18} z^9 \right) \\
&= \alpha\beta \left(1 + \frac{z^2}{4} - \frac{2}{4^3 \cdot 3} z^4 + \frac{14.2}{4^4 \cdot 5.6 \cdot 3} z^6 - \frac{34.14.2}{4^5 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 3} z^8 \right. \\
&\quad \left. + \frac{62.34.14.2}{4^6 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 3} z^{10} \right) \\
&\quad + \alpha\beta \left(z + \frac{z^3}{18} - \frac{7}{4^2 \cdot 5.18} z^5 + \frac{23.7}{4^3 \cdot 5.6 \cdot 7.18} z^7 - \frac{47.23}{4^4 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 9 \cdot 18} z^9 \right)
\end{aligned}$$

varyansı

$$\begin{aligned}
Var[w(z)] &= Var[A] \left(1 + \frac{z^2}{4} - \frac{2}{4^3 \cdot 3} z^4 + \frac{14.2}{4^4 \cdot 5.6 \cdot 3} z^6 - \frac{34.14.2}{4^5 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 3} z^8 \right. \\
&\quad \left. + \frac{62.34.14.2}{4^6 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 3} z^{10} \right) \\
&\quad + Var[B] \left(z + \frac{z^3}{18} - \frac{7}{4^2 \cdot 5.18} z^5 + \frac{23.7}{4^3 \cdot 5.6 \cdot 7.18} z^7 \right. \\
&\quad \left. - \frac{47.23}{4^4 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 9 \cdot 18} z^9 \right) \\
&= \alpha\beta^2 \left(1 + \frac{z^2}{4} - \frac{2}{4^3 \cdot 3} z^4 + \frac{14.2}{4^4 \cdot 5.6 \cdot 3} z^6 - \frac{34.14.2}{4^5 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 3} z^8 \right. \\
&\quad \left. + \frac{62.34.14.2}{4^6 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 3} z^{10} \right) \\
&\quad + \alpha\beta^2 \left(z + \frac{z^3}{18} - \frac{7}{4^2 \cdot 5.18} z^5 + \frac{23.7}{4^3 \cdot 5.6 \cdot 7.18} z^7 - \frac{47.23}{4^4 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 9 \cdot 18} z^9 \right)
\end{aligned}$$

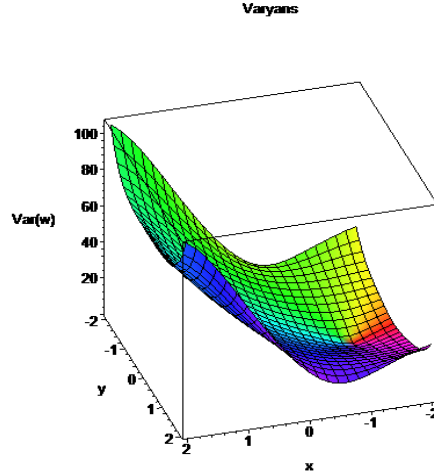
elde edilir. Özel olarak, $\alpha = 2, \beta = 3$ seçilirse, $A, B \sim G(\alpha = 2, \beta = 3)$ için

$$\begin{aligned}
E[w(z)] = & 6 \left(1 + \frac{z^2}{4} - \frac{2}{4^3 \cdot 3} z^4 + \frac{14.2}{4^4 \cdot 5.6 \cdot 3} z^6 - \frac{34.14.2}{4^5 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 3} z^8 \right. \\
& \left. + \frac{62.34.14.2}{4^6 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 3} z^{10} \right) \\
& + 6 \left(z + \frac{z^3}{18} - \frac{7}{4^2 \cdot 5 \cdot 18} z^5 + \frac{23.7}{4^3 \cdot 5.6 \cdot 7 \cdot 18} z^7 - \frac{47.23}{4^4 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 9 \cdot 18} z^9 \right)
\end{aligned}$$



Şekil 4.3. $\alpha = 2$, $\beta = 3$ değerleri için (4.4) denkleminin beklenen değeri

$$\begin{aligned}
Var[w(z)] = & 18 \left(1 + \frac{z^2}{4} - \frac{2}{4^3 \cdot 3} z^4 + \frac{14.2}{4^4 \cdot 5.6 \cdot 3} z^6 - \frac{34.14.2}{4^5 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 3} z^8 \right. \\
& \left. + \frac{62.34.14.2}{4^6 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 3} z^{10} \right) \\
& + 18 \left(z + \frac{z^3}{18} - \frac{7}{4^2 \cdot 5 \cdot 18} z^5 + \frac{23.7}{4^3 \cdot 5.6 \cdot 7 \cdot 18} z^7 - \frac{47.23}{4^4 \cdot 5.6 \cdot 7.8 \cdot 9 \cdot 18} z^9 \right)
\end{aligned}$$



Şekil 4.4. $\alpha = 2, \beta = 3$ değerleri için (4.4) denkleminin varyansı

Örnek 4.3.

$$w'' + \sin(z) w = 0 \quad (4.5)$$

ve

$$w(0) = A, w'(0) = B$$

burada, $A \sim U(\alpha, \beta)$ düzgün dağılımına sahip bağımsız rastgele değişken olmak üzere, rastgele kompleks adi diferensiyel denkleminin kuvvet serisi çözümünü bularak, olasılık karakteristiklerini inceleyiniz.

Çözüm: $z = 0$ bu denklemin bir adi noktası, $z = 0$ 'da $\sin(z)$ analitiktir. $\sin(z)$ ' nin Maclauren serisi açılımı,

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

şeklinde çözüm arayalım.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n z^{n-2} + \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = 0$$

$$2c_2 + 6c_3 z + 12c_4 z^2 + 20c_5 z^3 + \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots) = 0$$

$$c_2 = 0, c_3 = \frac{c_0}{6}, c_4 = -\frac{c_1}{12}, c_5 = \frac{c_0}{120}$$

bulduğumuz değerleri yerine yazalım.

$$w(z) = \left(1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) c_0 + \left(z - \frac{z^4}{12} - \dots \right) c_1$$

$$w(0) = c_0 \Rightarrow c_0 = A$$

$$w'(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = B$$

$$w(z) = \left(1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) A + \left(z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{12} - \dots \right) B$$

elde edilir. A Düzgün dağılıma sahip bağımsız rastgele değişken $A \sim U(\alpha, \beta)$ ve Düzgün dağılımın moment çıkaran fonksiyonu

$$M_{z(t)} = E[e^{tz}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t}$$

$z \sim U(\alpha, \beta)$ $E[x] = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $Var[x] = \frac{(\alpha-\beta)^2}{12}$ bu momentleri kullanırken, x ve y bağımsız rastgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$, bu yaklaşık formüller kullanılarak, beklenen değeri,

$$E[w(z)] = \left(1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right) E[A] + \left(z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{12} - \dots\right) E[B]$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{2} \left[\left(1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right) + \left(z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{12} - \dots\right) \right]$$

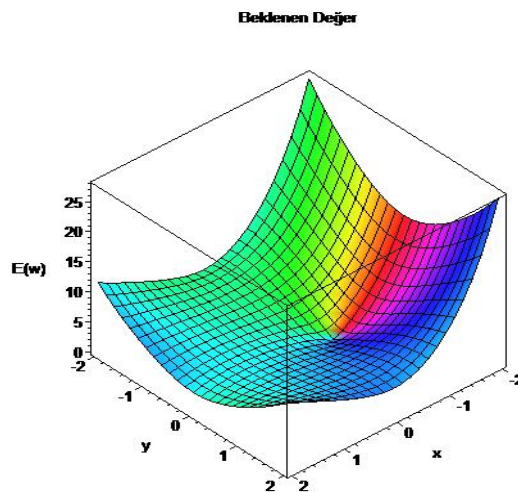
Varyansı,

$$Var[w(z)] = \left(1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right) E[A] + \left(z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{12} - \dots\right) E[B]$$

$$= \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \left[\left(1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right) + \left(z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{12} - \dots\right) \right]$$

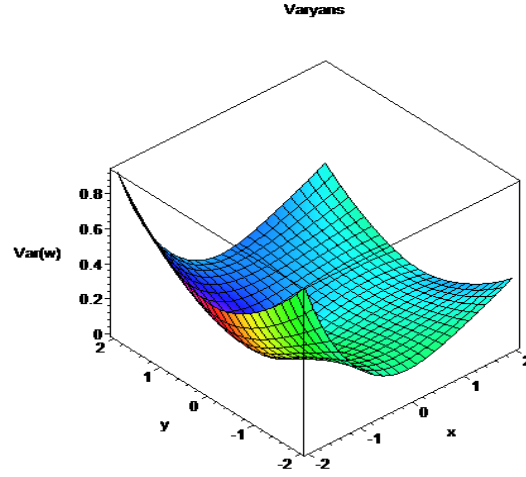
elde edilir. Özel olarak, $\alpha = 2$, $\beta = 3$ seçilirse, $A, B \sim U(\alpha = 2, \beta = 3)$ için

$$E[w(z)] = \frac{5}{2} \left[1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{12} \right]$$



Şekil 4.5. $\alpha = 2$, $\beta = 3$ değerleri için (4.5) denkleminin beklenen değeri

$$Var[w(z)] = \frac{1}{12} \left[1 + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{12} \right]$$



Şekil 4.6. $\alpha = 2$, $\beta = 3$ değerleri için (4.5) denkleminin varyansı

4.1. Frobenius Yöntemi

$$z^2 w'' + z[zp(z)]w' + [z^2 q(z)]w = 0 \quad (4.6)$$

adi kompleks diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada

$$zp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \quad ve \quad z^2 q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \quad (4.7)$$

olur. Eğer z_0 (4.6) denkleminin bir regüler tekil noktası ise bu denkleme karşılık gelen Cauchy-Euler diferensiyel denklemi

$$z^2 w'' + p_0 z w' + q_0 w = 0 \quad (4.8)$$

olur. Cauchy-Euler adi kompleks diferensiyel denklemi ile ilgili incelemeleri yapılırken alternatif olarak sunulan $w = z^m$ modelinden yararlanılarak (4.6) denkleminin $z > 0$ için

$$w = z^r \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+r} \quad b_0 \neq 0, \quad z > 0 \quad (4.9)$$

ile verilen seriye Frobenius serisi denir ve bu seride $b_0 \neq 0$ dır. Çözüm de $w = \phi(z, r)$ yazılmasının nedeni çözümün r ye de bağlı olmasından kaynaklanmaktadır. Eğer (4.9) ifadesinin türevleri alınırsa,

$$w' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) b_n z^{n+r-1}, \quad w'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) b_n z^{n+r-2} \quad (4.10)$$

olur. Eğer (4.9) ve (4.10) değerlerini (4.6) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \phi &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) b_n z^{n+r-2} + z \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) b_n z^{n+r-1} \right) \\ &\quad + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+r} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) b_n z^{n+r} + z^r \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) b_n z^n \right) \\ &\quad + z^r \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)b_n z^{n+r} + z^r \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+r)p_{n-k}b_k \right) z^n \\
&\quad + z^r \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n q_{n-k}b_k \right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r)(n+r-1)b_n + \sum_{k=0}^n (k+r)p_{n-k}b_k + \sum_{k=0}^n q_{n-k}b_k \right] z^{n+r} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer serinin $n = 0$ değerine karşılık gelen terimi ayrılırsa, $\phi = 0$ denklemi

$$\begin{aligned}
\phi &= [r(r-1) + p_0r + q_0]b_0z^r \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+r)(n+r-1)b_n + \sum_{k=0}^n [(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]b_k \right\} z^{n+r} = 0
\end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned}
&[r(r-1) + p_0r + q_0]b_0z^r \\
&\quad + z^r \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+r)(n+r-1)b_n + \sum_{k=0}^n [(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]b_k \right\} z^n = 0
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $z \neq 0$ olduğunu kullanarak bu eşitliğin ilk tarafını önce z^r parantezine alıp daha sonra eşitliğin her iki tarafını $\frac{1}{z^r}$ ile çarparsak,

$$[r(r-1) + p_0r + q_0]b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (n+r)(n+r-1)b_n + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]b_k \right\} z^n = 0$$

elde edilir. Eğer son ifadede polinomlar için özdeşlik teoremi kullanılırsa,

$$[r(r-1) + p_0r + q_0]b_0 = 0 \quad (4.11)$$

ve $n \geq 1$ için

$$(n+r)(n+r-1)b_n + \sum_{k=0}^n [(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]b_k = 0$$

ya da $k = n$ ye karşılık gelen terimini ayırarak,

$$[(n+r)(n+r-1) + (n+r)p_0 + q_0]b_n + \sum_{k=0}^{n-1} [(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]b_k = 0 \quad (4.12)$$

elde ederiz. Eğer $f(r) = r(r-1) + p_0r + q_0$ tanımlanırsa (4.6) ve (4.12) ifadeleri sırasıyla $b_0 \neq 0$ olduğunda

$$\begin{aligned} f(r) &= r(r-1) + p_0r + q_0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

ve

$$f(n+r)b_n + \sum_{k=0}^{n-1} [(k+r)p_{n-k} + q_{n-k}]b_k = 0 \quad (4.14)$$

olarak yazılmaktadır. (4.13) ile verilen $f(r) = 0$ denkleminin (4.11) denkleminin karşılık gelen indisel denklem ve (4.14) ifadesine de genel indirgeme formülü denir.

$f(r) = r(r - 1) + p_0r + q_0 = 0$ indisel denklemi, r bilinmeyenli ikinci mertebeden bir cebirsel denklem olduğundan denklemin r_1 ve r_2 gibi iki tane kökü vardır. İndisel denklemin köklerini $r_1 \geq r_2$ olarak seçilsin. Böylece bu kökler için $r_1 = r_2$ veya $r_1 > r_2$ gibi iki durumu söz konusudur. İndisel denklemin kökleri olan r_1 ve r_2 sayılarına denklemin tekil kuvvetleri denir ve tekil nokta civarında çözümünün bulunmasında yardımcı olunur. Diğer taraftan (4.14) ile verilen genel indirgeme formülünden de görüleceği gibi her bir a_n katsayısı r sayısına ve önceden gelen b_0, b_1, \dots, b_{n-1} katsayılarına bağlıdır ve $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ katsayıları $f(r + 1), f(r + 2), \dots, f(r + n), \dots$ ler sıfır olmadığı sürece $zp(z)$ ve $z^2q(z)$ serilerinin katsayılarına ve b_0 sayısına bağlı olarak hesaplanacağı söylenebilir. İndisel denklemin köklerinin durumuna göre (4.14) adi kompleks diferensiyel denkleminin lineer bağımsız iki çözümünü bulalım.

1. $r_1 \neq r_2$ (kökleri farklı) ise,

$f(r) = (r - r_1)(r - r_2)$ olarak yazılabilir ve $f(n + r_1) = n(n + r_1 - r_2) > 0$ dır. Bu durumda indisel denklemin büyük kökü r_1 için (4.14) yardımıyla ardışık katsayılar elde edilip,

$$w_1(z) = z^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(r_1) z^n, \quad z > 0$$

çözümü elde edilir. Bu seri $0 < |z| < p$ için yakınsaktır. İndisel denklemin diğer kökü r_2 için,

$$f(n + r_2) = n(n - (r_1 - r_2))$$

dir. Buradan anlaşılabacağı üzere $r_1 - r_2$ farkı bir pozitif tam sayı olmadığı sürece $n \geq 1$ için $f(n + r_2) \neq 0$ olacaktır. Dolayısıyla r_2 kökü için

$$w_2(z) = z^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(r_2) z^n, \quad x > 0$$

çözümü elde edilir. Bu şekilde elde edilen $w_1(z)$ ve $w_2(z)$ fonksiyonları lineer bağımsız olmalarından dolayı, (4.14) adi kompleks diferensiyel denkleminin genel çözümünü

$$w(z) = c_1 w_1(z) + c_2 w_2(z)$$

olarak yazılabilir.

2. $r_1 = r_2$ (kökler eşit) ise, bu durumda Frobenius serisi biçiminde sadece bir tane çözüm

bulunur. Dolayısıyla ikinci lineer bağımsız çözümü başka bir yolla elde edebiliriz. a_n katsayıları aynı zamanda r ye de bağlı olduğundan $r = r_1$ olma ihtimalini kullanmadan

$$\phi(z, r) = z^r \sum_{n=0}^{\infty} b_n(r) z^n, \quad z > 0 \quad (4.15)$$

serisini oluşturalım. $r = r_1$ için (4.15) indirgeme bağıntısını kullanarak b_n leri r ye bağlı olarak $n \geq 1$ için elde edilirse, $b_n(r)$ lerin bu seçimi yardımıyla (4.13) denklemini r_1 indisel denklemin katlı kökü olduğundan,

$$\begin{aligned} \phi(z, r) &= b_0 f(r) z^r \\ &= b_0 (r - r_1)^2 z^r \end{aligned} \quad (4.16)$$

denklemine dönüşür. Eğer (4.16) denkleminde $r = r_1$ alınırsa, $\phi(z, r_1) = 0$ olur ki bu da

$$w_1(z) = z^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(r_1) z^n, \quad z > 0$$

ile verilen serinin birinci çözüm olarak alınabileceğini gösterir. Fakat bundan daha önemlisi aynı Cauchy-Euler adi kompleks diferensiyel denkleminde olduğu gibi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \phi(z, r)|_{r=r_1} &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial r}(z, r_1) \right] \\
&= b_0 \frac{\partial}{\partial r} ((r - r_1)^2 z^r)_{r=r_1} \\
&= b_0 [(r - r_1)^2 z^r \ln z + 2(r - r_1) z^r]_{r=r_1} = 0
\end{aligned}$$

elde edilmesidir. Bu da (4.11) adi kompleks diferensiyel denkleminin diğ er ç özü mü nün

$$\begin{aligned}
w_2(z) &= \frac{\partial \phi(z, r)}{\partial r} |_{r=r_1} \\
&= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ z^r \left[b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(r) z^n \right] \right\}_{r=r_1} \\
&= z^{r_1} \ln z \left[b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(r_1) z^n \right] + z^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(r_1) z^n \\
&= w_1(z) \ln z + z^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(r_1) z^n \tag{4.17}
\end{aligned}$$

olarak verilir. Bu metodun en önemli noktası (4.17) ifadesindeki $b'_n(r)$ katsayılarını oluşturmaktır. Böylece (4.17) ç özü mü nün alternatif olarak $w_1(z)$ bilinen birinci ç özü m olmak üzere,

$$w_2(z) = w_1(z) \ln z + z^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \quad z > 0 \tag{4.18}$$

modelinde bir ç özü m önerilir ve bu önerinin ç özü m olabilmesi için b_n katsayıları belirlenmelidir.

3. $r_1 - r_2 = \mathcal{N} \in \mathbb{N}$ (kökleri farklı bir tam sayı) ise,

Bu durumda, indisel denklemin büyük kökü r_1 için

$$f(n + r_1) = n(n + r_1 - r_2)$$

$$= n(n + \mathcal{N}) > 0$$

olup genel indirgeme formülü her $n \geq 1$ için çalışır. Dolayısıyla

$$w_1(z) = z^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(r_1) z^n, \quad z > 0$$

çözümü elde edilir. Fakat

$$f(n + r_2) = n(n - (r_1 - r_2))$$

$$= n(n - \mathcal{N})$$

olup $n = 1, 2, \dots, \mathcal{N} - 1$ için $f(n + r_2) \neq 0$ olur. Dolayısıyla $b_1, b_2, \dots, b_{\mathcal{N}-1}$ katsayıları a_0 türünden hesaplanabilir. Ama $f(\mathcal{N} + r_2) = 0$ dir. Bu yüzden $n \geq \mathcal{N}$ için b_n katsayıları için iki durum ortaya çıkar. Bu iki durumu daha iyi ortaya koyabilmek için (4.11) indirgeme formülünü

$$g_n(r) = \sum_{k=0}^{n-1} [(k + r)p_{n-k} + q_{n-k}] b_k = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

olmak üzere

$$f(n + r)b_n + g_n(r) = 0 \tag{4.19}$$

olarak yazalım.

- Eğer

$$g_n(r_2) = \sum_{k=0}^{n-1} [(k + r_2)p_{n-k} + q_{n-k}] b_k = 0$$

ise (4.16) formülü,

$$0 \cdot b_{\mathcal{N}} + 0 = 0$$

halini alır ki bu eşitlik keyfi $b_{\mathcal{N}}$ katsayısı için daima sağlanır. Dolayısıyla $n = \mathcal{N} + 1, \mathcal{N} + 2, \dots$ için $f(n + r_2) \neq 0$ olacağından $b_{\mathcal{N}+1}, b_{\mathcal{N}+2}, \dots$ katsayıları $b_{\mathcal{N}}$ keyfi değeri türünden yazılabilir.

Sonuç olarak $r_1 - r_2 = \mathcal{N} \in \mathbb{N}$ ve $g_n(r_2) = 0$ ise $b_1, b_2, \dots, b_{\mathcal{N}-1}$ katsayıları b_0 türünden, $b_{\mathcal{N}+1}, b_{\mathcal{N}+2}, \dots$ katsayıları da $b_{\mathcal{N}}$ keyfi değeri türünden yazılabilir. Böylece

$$w_2(z) = b_0 z_1(z) + b_{\mathcal{N}} z_2(z)$$

biçiminde bir çözüm elde edilir. $z_1(z)$ ve $z_2(z)$ fonksiyonları lineer bağımsız olduklarından bu biçimde elde edilen $w_2(z)$ çözümü, denklemin genel çözümü istenirse $w_1(z)$ ile lineer bağımsız diğer çözüm olarak alınabilir.

- $g_n(r_2) \neq 0$ ise (4.16) indirgeme formülünden elde edilecek $b_{\mathcal{N}}, b_{\mathcal{N}+1}, \dots$ katsayıları $f(\mathcal{N} + r_2)$ çarpanından dolayı tanımsız olacaktır. Bu yüzden $w_1(z)$ ile lineer bağımsız diğer çözüm elde edebilmek için (4.11) indirgeme formülü kullanılarak,

$$\phi(z, r) = b_0 \left[1 + \frac{h_1(r)}{f(r+1)} z + \frac{h_2(r)}{f(r+1)f(r+2)} z^2 + \dots \right] \quad (4.20)$$

serisini oluşturalım. Burada $h_i(r)$, $(i = 1, 2, \dots)$ ler r nin polinomlarıdır. Bu seri aşikar olarak

$$\phi(z, r) = b_0 f(r) z^r$$

adi kompleks diferensiyel denklemini sağlar. $f(\mathcal{N} + r_2) = 0$ olduğundan $r = r_2$ için (4.17) nin sağ tarafındaki toplam, belli ifadeden sonraki terimlerin paydasında $f(\mathcal{N} + r_2)$ terimi çarpan olacağından, tanımlı olmayacaktır. Bu problemi ortadan kaldırmak için (4.17) ifadesini $f(\mathcal{N} + r_2)$ ile çarpalım. Bu durumda $r = r_2$ için belli terimden sonra gelen paydadaki sıfır olma ihtimali ortadan kalkmış olur. Buradan

$$f(\mathcal{N} + r) = (r - r_2)(r + r_1 - 2r_2)$$

olduğundan $\phi(z, r)$ ifadesini $f(\mathcal{N} + r_2)$ ile çarpmak yerine $r - r_2$ ile çarpmak yeterli olacaktır. Bu çarpan z' ye bağlı olmadığından

$$\begin{aligned} \{(r - r_2)\phi(z, r)\} &= b_0(r - r_2)f(r)z^r \\ &= b_0(r - r_2)^2(r - r_1)z^r \end{aligned} \quad (4.21)$$

halini alacaktır. Burada $r = r_1$ için $\phi(z, r_1)$ in bir çözüm olduğu aşıkardır. Eğer (4.21) in her iki tarafının r ye göre türevini alıp $r = r_2$ daki değerine bakarsak,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \{(r - r_2)\phi(z, r)\}|_{r=r_2} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r - r_2)\phi(z, r) \right\}_{r=r_2} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [b_0(r - r_2)f(r)z^r] \right\}_{r=r_2} \\ &= b_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial r} [(r - r_1)(r - r_2)^2 z^r] \right\}_{r=r_2} = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$w_2(z) = \frac{\partial}{\partial r} \{(r - r_2)\phi(z, r)\}_{r=r_2}$$

fonksiyonu (4.6) adi kompleks diferensiyel denklemini sağlar. Dolayısıyla istenen diğer çözüm olarak bu fonksiyonu alabiliriz. Bu şekilde elde edilen $w_1(z)$ ve $w_2(z)$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olacakları aşıkardır. Böylece (4.6) adi kompleks diferensiyel denkleminin genel çözümünü $r = r_1$ ve $r = r_2$ nin yapısına bağlı olarak yukarıda bulduğumuz iki lineer bağımsız çözümü sırasıyla $w_1(z)$ ve $w_2(z)$ ile gösterirsek c_1 ve c_2 ler keyfî sabitler olmak üzere (4.6) adi kompleks diferensiyel denkleminin genel çözümünü

$$w(z) = c_1 w_1(z) + c_2 w_2(z)$$

olarak yazılabilir.

Teorem 4.2. $z = z_0$ noktası (4.6) denkleminin bir regüler tekil noktası ve $r_1 \geq r_2$ olmak üzere r_1 ve r_2 ler de indisel denklemin kökleri olsunlar. Bu durumda (4.6) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü:

- $r_1 - r_2 \neq 0, 1, 2, \dots$ ise

$$w_1(z) = |z - z_0|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n |z - z_0|^n, \quad b_0 \neq 0,$$

$$w_2(z) = |z - z_0|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n |z - z_0|^n, \quad c_0 \neq 0$$

dır.

- $r_1 - r_2 = 1, 2, \dots$ ise $w_1(z)$ birinci durumdaki ile aynı olmak üzere,

$$w_2(z) = \frac{\partial}{\partial r} \{(r - r_2) \phi(z, r)\}_{r=r_2}$$

veya alternatif olarak

$$w_2(z) = C w_1(z) \ln|z - z_0| + |z - z_0|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n |z - z_0|^n, \quad c_0 \neq 0$$

dır. Buradaki C sabiti $w_2(z)$ çözümünün denkleme yerine yazılması ile bulunur ve sıfır olabilir.

- $r_1 - r_2 = 0$ ise $w_1(z)$ birinci durumdaki ile aynı olmak üzere,

$$w_2(z) = w_1(z) \ln|z - z_0| + |z - z_0|^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b'_n(r_1) |z - z_0|^n$$

veya alternatif olarak

$$w_2(z) = w_1(z) \ln|z - z_0| + |z - z_0|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n |z - z_0|^n$$

dır.

Örnek 4.4.

$$2zw''(z) + w'(z) + 5w(z) = 0 \quad (4.22)$$

ve

$$w(1) = A, w'(1) = B$$

$A \sim U(\alpha, \beta)$ ve $B \sim N(\mu, \sigma^2)$ birbirinden bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere, başlangıç değer problemini kuvvet serisi yöntemi ile çözelim.

Çözüm: $z = 0$ verilen denklemin tekil noktasıdır.

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+r}$$

denklemden yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&= 2z \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)(k+r-1)a_k z^{k+r-2} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+r)a_k z^{k+r-1} + 5 \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+r} \\
&\sum_{k=-1}^{\infty} [2(k+r-1)(k+r) + (k+r+1)]a_{k+1} z^{k+r} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} [2(k+r-1)(k+r) + (k+r+1)]a_{k+1} + 5a_k] z^{k+r} = 0
\end{aligned}$$

$2r^2 - 2r + r = 0$ ise $r_1 = 0, r_2 = \frac{1}{2}$ olduğundan,

$$a_k = -\frac{5a_k}{(k+r+1)(2k+2r+1)}$$

elde edilir.

$$r = 0 \text{ için } b_{k+1} = \frac{-5b_k}{(k+1)(2k+1)}$$

$$k = 0 \text{ için } b_1 = -\frac{5b_0}{1 \cdot 1} \Rightarrow b_1 = -5b_0$$

$$k = 1 \text{ için } b_2 = \frac{(-5)^2 b_0}{2 \cdot 3}$$

$$k = 2 \text{ için } b_3 = \frac{(-5)^3 b_0}{2 \cdot 3^2 \cdot 5}$$

$$r = \frac{1}{2} \text{ için } d_{k+1} = -\frac{5d_k}{(2k+3)(k+1)}$$

$$k = 0 \text{ için } d_1 = -\frac{5d_0}{3 \cdot 1}$$

$$k = 1 \text{ için } d_2 = \frac{(-5)^2 d_0}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$k = 2 \text{ için } d_3 = \frac{(-5)^3 d_0}{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$$

$b_0 = 1$ seçilirse,

$$w_1(z) = \left[1 - \frac{5z}{1!} + \frac{5^2 z^2}{2!} - \frac{4 \cdot 5^3 z^3}{3 \cdot 5!} + \dots \right]$$

$d_0 = 1$ seçilirse,

$$w_2(z) = \left[z^{\frac{1}{2}} - \frac{5z^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot 1} + \frac{4 \cdot 5^2 z^{\frac{5}{2}}}{5!} - \frac{4 \cdot 6 \cdot 5^3 z^{\frac{7}{2}}}{3 \cdot 7!} + \dots \right]$$

Denklemin çözümü

$$w(z) = c_1 w_1(z) + c_2 w_2(z) . \quad (4.23)$$

Başlangıç koşulları yerlerine yazılırsa

$$w(1) = c_1 k_1 + c_2 k_2 = A$$

$w'(1) = c_1 l_1 + c_2 l_2 = B$ olduğundan, gerekli işlemler yapıldıktan sonra $c_1 = \frac{Al_2 - Bk_2}{k_1 l_2 - k_2 l_1}$,

$c_2 = \frac{Al_1 - Bk_1}{k_2 l_1 - k_1 l_2}$ elde edilir. Bulunan c_1 ve c_2 (4.23) denkleminde yerine yazılırsa

$$w(z) = \frac{Al_2 - Bk_2}{k_1 l_2 - k_2 l_1} \left(1 - \frac{5z}{1!} + \frac{5^2 z^2}{3!} - \frac{4.5^3 z^3}{3.5!} + \dots \right) \\ + \frac{Al_1 - Bk_1}{k_2 l_1 - k_1 l_2} \left(z^{\frac{1}{2}} - \frac{5z^{\frac{3}{2}}}{3.1} + \frac{4.5^2 z^{\frac{5}{2}}}{5!} - \frac{4.6.5^3 z^{\frac{7}{2}}}{3.7!} + \dots \right)$$

bulunur. A düzgün dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişken $A \sim U(\alpha, \beta)$ ve Düzgün dağılımın moment çıkaran fonksiyonu

$$M_{z(t)} = E[e^{tz}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t}$$

$$z \sim U(\alpha, \beta) \quad E[x] = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad Var[x] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$$

$B \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılıma sahip ve moment çıkaran fonksiyonu,

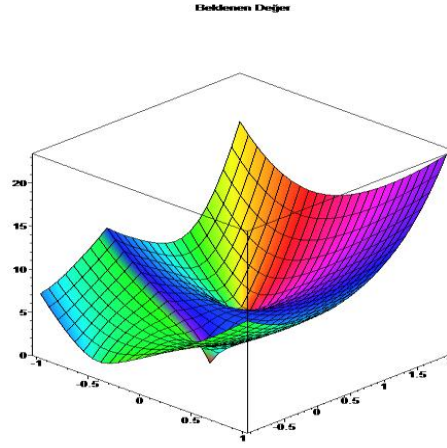
$$M_z(t) = E[e^{tz}]$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2}.$$

$E[z] = \mu$, $E[z^2] = \mu^2 + \sigma^2$, $Var[w(z)] = \sigma^2$. $A \sim U(\alpha = 3, \beta = 2)$ ve $B \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$ özel değerleri için beklenen değeri,

$$E[w(z)] = \frac{E[A]l_2 - E[B]k_2}{k_1 l_2 - k_2 l_1} \left(1 - \frac{5z}{1!} + \frac{5^2 z^2}{3!} - \frac{4.5^3 z^3}{3.5!} + \dots \right) \\ + \frac{E[A]l_1 - E[B]k_1}{k_2 l_1 - k_1 l_2} \left(z^{\frac{1}{2}} - \frac{5z^{\frac{3}{2}}}{3.1} + \frac{4.5^2 z^{\frac{5}{2}}}{5!} - \frac{4.6.5^3 z^{\frac{7}{2}}}{3.7!} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\alpha + \beta}{2} l_2 - \mu k_2}{k_1 l_2 - k_2 l_1} \left(1 - \frac{5z}{1!} + \frac{5^2 z^2}{3!} - \frac{4.5^3 z^3}{3.5!} + \dots \right) \\
&\quad + \frac{\frac{\alpha + \beta}{2} l_1 - \mu k_1}{k_2 l_1 - k_1 l_2} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{5z^{\frac{3}{2}}}{3.1} + \frac{4.5^2 z^{\frac{5}{2}}}{5!} - \frac{4.6.5^3 z^{\frac{7}{2}}}{3.7!} + \dots \right) \\
&= \frac{\frac{5}{2} l_2 - k_2}{k_1 l_2 - k_2 l_1} \left(1 - \frac{5z}{1!} + \frac{5^2 z^2}{3!} - \frac{4.5^3 z^3}{3.5!} + \dots \right) \\
&\quad + \frac{\frac{5}{2} l_1 - k_1}{k_2 l_1 - k_1 l_2} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{5z^{\frac{3}{2}}}{3.1} + \frac{4.5^2 z^{\frac{5}{2}}}{5!} - \frac{4.6.5^3 z^{\frac{7}{2}}}{3.7!} + \dots \right)
\end{aligned}$$



Şekil 4.7. $\alpha = 2, \beta = 1$ ve $\mu = 1, \sigma^2 = 4$ değerleri için (4.22) denkleminin beklenen değeri

varyansı,

$$\begin{aligned}
Var[w(z)] &= \frac{Var[A]l_2 - Var[B]k_2}{k_1 l_2 - k_2 l_1} \left(1 - \frac{5z^2}{1!} + \frac{5^2 z^4}{3!} - \frac{4.5^3 z^6}{3.5!} + \dots \right) \\
&\quad + \frac{Var[A]l_1 - Var[B]k_1}{k_2 l_1 - k_1 l_2} \left(z - \frac{5z^3}{3.1} + \frac{4.5^2 z^5}{5!} - \frac{4.6.5^3 z^7}{3.7!} + \dots \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} l_2 - \sigma^2 k_2}{k_1 l_2 - k_2 l_1} \left(1 - \frac{5z^2}{1!} + \frac{5^2 z^4}{3!} - \frac{4.5^3 z^6}{3.5!} + \dots \right) \\
&\quad + \frac{\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} l_1 - \sigma^2 k_1}{k_2 l_1 - k_1 l_2} \left(z - \frac{5z^3}{3.1} + \frac{4.5^2 z^5}{5!} - \frac{4.6.5^3 z^7}{3.7!} + \dots \right) \\
&= \frac{\frac{1}{12} l_2 - 4k_2}{k_1 l_2 - k_2 l_1} \left(1 - \frac{5z^2}{1!} + \frac{5^2 z^4}{3!} - \frac{4.5^3 z^6}{3.5!} + \dots \right) \\
&\quad + \frac{\frac{1}{12} l_1 - 4k_1}{k_2 l_1 - k_1 l_2} \left(z - \frac{5z^3}{3.1} + \frac{4.5^2 z^5}{5!} - \frac{4.6.5^3 z^7}{3.7!} + \dots \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 4.5.

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - 1)w(z) = 0 \quad (4.24)$$

ve $w(1) = A$, $w'(1) = B$ burada $A, B \sim U(\alpha, \beta)$ düzgün dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişken olmak üzere, başlangıç değer problemini Frobeniüs yöntemi ile çözüp, olasılık karakteristiklerini belirleyiniz.

Çözüm:

Yukarıda verilen denklem birinci mertebeden kompleks Bessel denklemi olduğundan, denklemin çözümü

$$w(z) = c_1 J_k(z) + c_2 J_{-k}(z)$$

$$k = 1 \text{ için } w(z) = c_1 J_1(z) + c_2 J_2(z)$$

$$J_1(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)! p!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p+1}$$

$$J_{-1}(z) = -J_1(z)$$

$$w(z) = c_1 J_1(z) + c_2 Y_1(z)$$

$$w(1) = c_1 J_1(1) + c_2 Y_1(1) = A$$

$$w'(z) = c_1 J_1'(z) + c_2 Y_1'(z)$$

$$w'(1) = c_1 J_1'(1) + c_2 Y_1'(1) = B$$

$$\begin{bmatrix} J_1(1) & Y_1(1) \\ J_1'(1) & Y_1'(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} A & Y_1(1) \\ B & Y_1'(1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_1(1) & Y_1(1) \\ J_1'(1) & Y_1'(1) \end{vmatrix}} = \frac{AY_1'(1) - BY_1(1)}{J_1(1)Y_1'(1) - J_1'(1)Y_1(1)}$$

$$K = J_1(1)Y_1'(1) - J_1'(1)Y_1(1)$$

$$c_1 = \frac{AY_1'(1)}{K} - \frac{BY_1(1)}{K}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} J_1(1) & A \\ J_1'(1) & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_1(1) & Y_1(1) \\ J_1'(1) & Y_1'(1) \end{vmatrix}} = \frac{BJ_1(1) - AJ_1'(1)}{K}$$

$$c_2 = -\frac{AJ_1'(1)}{K} + \frac{BJ_1(1)}{K}$$

$$w(z) = \left[\frac{AY_1'(1)}{K} - \frac{BY_1(1)}{K} \right] J_1(z) + \left[-\frac{AJ_1'(1)}{K} + \frac{BJ_1(1)}{K} \right] Y_1(z)$$

bulunur. $z \sim U(\alpha, \beta)$

$$M_z(t) = E[e^{tz}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t}$$

$z \sim U(\alpha, \beta)$, $E[z] = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $Var[z] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$ bu momentleri kullanırken, x ve y bağımsız rastgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$, bu yaklaşık formüller kullanılarak, beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$A, B \sim U(\alpha, \beta)$

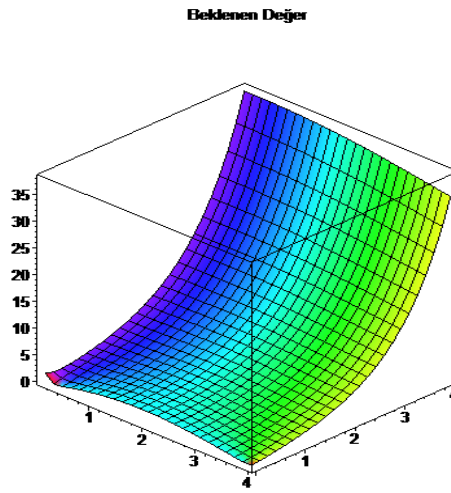
$$E[w(z)] = \left[\frac{E[A]Y_1'(1)}{K} - \frac{E[B]Y_1(1)}{K} \right] J_1(z) + \left[-\frac{E[A]J_1'(1)}{K} + \frac{E[B]J_1(1)}{K} \right] Y_1(z)$$

$$= \left[\frac{Y_1'(1)}{K} - \frac{Y_1(1)}{K} \right] \frac{\alpha + \beta}{2} J_1(z) + \left[-\frac{J_1'(1)}{K} + \frac{J_1(1)}{K} \right] \frac{\alpha + \beta}{2} Y_1(z).$$

$$Var[w(z)] = \left[\left(\frac{Y_1'(1)}{K} J_1(z) \right)^2 + \left(\frac{J_1'(1) Y_1(z)}{K} \right)^2 \right] \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \\ + \left[\left(\frac{Y_1(1)}{K} J_1(z) \right)^2 + \left(\frac{J_1(1) Y_1(z)}{K} \right)^2 \right] \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$$

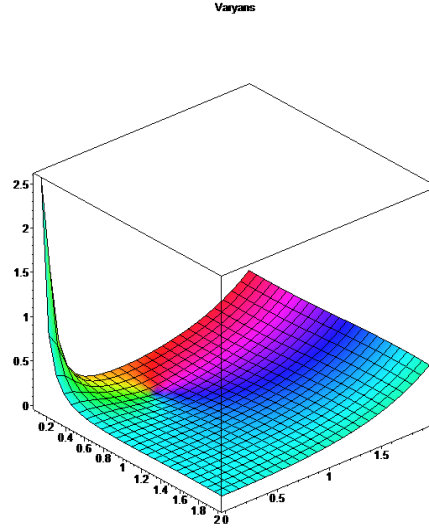
Özel olarak $\alpha = 2, \beta = 1$ seçilirse, beklenen değer ve varyansı;

$$E[w(z)] = \left[\frac{Y_1'(1)}{K} - \frac{Y_1(1)}{K} \right] \frac{3}{2} J_1(z) + \left[-\frac{J_1'(1)}{K} + \frac{J_1(1)}{K} \right] \frac{3}{2} Y_1(z)$$



Şekil 4.8. $\alpha = 2, \beta = 1$ değerleri için (4.24) denkleminin beklenen değeri

$$Var[w(z)] = \left[\left(\frac{Y_1'(1)}{K} J_1(z) \right)^2 + \left(\frac{J_1'(1) Y_1(z)}{K} \right)^2 \right] \frac{1}{12} \\ + \left[\left(\frac{Y_1(1)}{K} J_1(z) \right)^2 + \left(\frac{J_1(1) Y_1(z)}{K} \right)^2 \right] \frac{1}{12}$$



Şekil 4.9. $\alpha = 2, \beta = 1$ değerleri için (4.24) denkleminin varyansı

Örnek 4.6.

$$z^2 w''(z) - 2zw'(z) + \frac{8}{9}w(z) = 0 \quad (4.25)$$

$$w(1) = A, w'(1) = B$$

burada $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ ve $B \sim Beta(\alpha, \beta)$ dağılımlarına sahip birbirinden bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere, başlangıç değer problemini Frobeniüs yöntemi ile çözüp, olasılık karakteristiklerini belirleyiniz.

Çözüm: $z = 0$ verilen denklemin bir düzgün tekil noktasıdır.

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+r}$$

denklemde yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(k + \frac{8}{3} \right) \left(k + \frac{5}{3} \right) - 2 \left(k + \frac{8}{3} \right) + \frac{8}{9} \right] a_k z^{k+\frac{8}{3}} = 0$$

elde edilir. Buradan

$$r^2 - 3r + \frac{8}{9} = 0$$

indisel denklemine ve $a_0 \neq 0, a_k = 0$ olduğundan

$$w(z) = c_1 z^{r_1} + c_2 z^{r_2}$$

$$= c_1 z^{\frac{8}{3}} + c_2 z^{\frac{1}{3}}$$

$$w(1) = c_1 + c_2 = A$$

$$w'(z) = \frac{8}{3} c_1 z^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{3} c_2 z^{-\frac{2}{3}}$$

$$w'(1) = \frac{8}{3} c_1 + \frac{1}{3} c_2 = B$$

c_1 ve c_2 değerleri taraf tarafa toplanırsa,

$$w(z) = \left(\frac{3B - A}{7} \right) z^{\frac{8}{3}} + \left(\frac{6A - 3B}{7} \right) z^{\frac{1}{3}}$$

elde edilir. $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ Normal dağılıma sahip ve moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_z(t) = E[e^{tz}]$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2}.$$

$$E[z] = \mu, \quad E[z^2] = \mu^2 + \sigma^2, \quad Var[w(z)] = \sigma^2.$$

$B \sim Beta(\alpha, \beta)$ Beta dağılımına sahip ve moment çıkaran fonksiyonu,

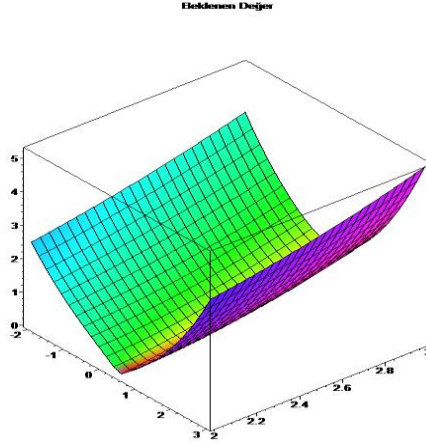
$$M_z(\alpha, \beta, t) = E[e^{tz}] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + r} \right) \frac{t^k}{k!}$$

$$E[z] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad Var[z] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

$A \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$ ve $B \sim Beta(\alpha = 3, \beta = 2)$ beklenen değeri,

$$E[w(z)] = \left(\frac{3E[B] - E[A]}{7} \right) z^{\frac{8}{3}} + \left(\frac{6E[A] - 3E[B]}{7} \right) z^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{3 \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \mu}{7} \right) z^{\frac{8}{3}} + \left(\frac{6\mu - 3 \frac{\alpha}{\alpha + \beta}}{7} \right) z^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{4}{35} z^{\frac{8}{3}} + \frac{3}{5} z^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$



Şekil 4.10. $\alpha = 3, \beta = 2$ ve $\mu = 1, \sigma^2 = 4$ için (4.25) denkleminin beklenen değeri

Varyansı,

$$\begin{aligned}
Var[w(z)] &= \left(\frac{3Var[B] - Var[A]}{7} \right) z^{\frac{8}{3}} + \left(\frac{6Var[A] - 3Var[B]}{7} \right) z^{\frac{1}{3}} \\
&= \left(\frac{3 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} - \mu}{7} \right) z^{\frac{16}{9}} + \left(\frac{6\mu - 3 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}}{7} \right) z^{\frac{1}{9}} \\
&= \left(\frac{3 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} - \mu}{7} \right) z^{\frac{16}{9}} + \left(\frac{6\mu - 3 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}}{7} \right) z^{\frac{1}{9}} \\
&= -\frac{22}{175} z^{\frac{16}{9}} + \frac{6}{7} z^{\frac{1}{9}}
\end{aligned}$$

bulunur.

5. Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

İki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi ile kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü ilk defa Cha'o Kuang Chen ve Shing Huei Ho[1] tarafından verilmiştir. $w(z)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k w(z)}{dz^k} \right]_{z=0}, \quad (5.1)$$

$W(k)$ 'nin ters diferansiyel dönüşümü,

$$w(k) = \sum_{k=0}^{\infty} W(k) z^k. \quad (5.2)$$

Denklem (5.1) ve (5.2) den

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{d^k w(z)}{dz^k} \right]_{z=0} \frac{z^k}{k!}. \quad (5.3)$$

Tek boyutlu diferansiyel dönüşümün temel teoremleri şunlardır[1]:

Teorem 5.1.1. Eğer $a(z) = w(z) \pm q(z)$, o zaman $A(k) = W(k) \pm Q(k)$.

Teorem 5.1.2. Eğer $a(z) = cw(z)$, o zaman $A(k) = cW(k)$.

Teorem 5.1.3. Eğer $a(z) = \frac{dw(z)}{dz}$, o zaman $A(k) = (k+1)W(k+1)$.

Teorem 5.1.4. Eğer $a(z) = \frac{d^n w(z)}{dz^n}$, o zaman $A(k) = \frac{(k+n)!}{k!} W(k+n)$.

Teorem 5.1.5. Eğer $a(z) = w(z)q(z)$, o zaman

$$A(k) = \sum_{m=0}^k W(k-m) Q(m).$$

Teorem 5.1.6. Eğer $a(z) = z^n$ ise $A(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 1 & k = n, \\ 0 & k \neq n. \end{cases}$

5.1. Lineer Olmayan Fonksiyonlar İçin Diferansiyel Dönüşüm Metodu

Durum.1. $f(w) = e^{aw}$ (Üstel Doğrusallık): Dönüşüm tanımından[1],

$$\begin{aligned} F(0) &= \left[e^{aw(z)} \right]_{z=0} \\ &= e^{aw(0)} \\ &= e^{aW(0)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Şimdi, z' ye göre $f(w) = e^{aw}$ türevini alarak,

$$\begin{aligned}\frac{df(w)}{dz} &= ae^{aw} \frac{dw(z)}{dz} \\ &= af(w) \frac{dw(z)}{dz}\end{aligned}\quad (5.5)$$

bulunur. (5.2) ifadesinin her iki tarafına diferensiyel dönüşüm yöntemi uygulanır ise

$$(k+1)F(k+1) = a \sum_{m=0}^k (m+1)W(m+1)F(k-m) \quad (5.6)$$

elde edilir. $(k+1)$ yerine k yazılırsa,

$$F(k) = a \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m+1}{k} W(m+1)F(k-1-m), \quad k \geq 1 \quad (5.7)$$

şeklinde bulunur. Denklem (5.4) ve (5.7) den $f(w) = e^{aw}$:

$$F(k) = \begin{cases} e^{aw}, & k = 0 \\ a \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m+1}{k} W(m+1)F(k-1-m), & k \geq 1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Durum 2. $f(w) = \ln(a + bw)$, $a + bw > 0$ (Logaritmik Doğrusallık): Dönüşümün tanımı ile

$$\begin{aligned}F(0) &= [\ln(a + bw(z))]_{z=0} \\ &= \ln(a + bw(0)) \\ &= \ln(a + bW(0)).\end{aligned}\quad (5.9)$$

Ayrıca, $f(w) = \ln(a + bw)$ nin z' ye göre türevi alınır,

$$\frac{df(w(z))}{dz} = \frac{b}{a + bw} \frac{dw(z)}{dz}, \quad (5.10)$$

ve ya eşdeğer olarak,

$$a \frac{df(w)}{dz} = b \left(\frac{dw(z)}{dz} - w \frac{df(w)}{dz} \right). \quad (5.11)$$

(5.11) denkleminin diferensiyel dönüşümü alınır aşağıdaki ifade elde edilir.

$$aF(k+1) = b \left[W(k+1) - \sum_{m=0}^k \frac{m+1}{k+1} F(m+1)W(k-m) \right]. \quad (5.12)$$

$k+1$ yerine k yazılırsa,

$$aF(k) = b \left[W(k) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m+1}{k} F(m+1)W(k-1-m) \right], \quad k \geq 1 \quad (5.13)$$

elde edilir. (5.13) denkleminde $k=1$ alınırsa,

$$F(1) = \frac{b}{a+bW(0)} W(1) \quad (5.14)$$

bulunur.

$k \geq 2$ için denklem (5.13) yeniden yazılacak olursa,

$$F(k) = \frac{b}{a+bW(0)} \left[W(k) - \sum_{m=0}^{k-2} \frac{m+1}{k} F(m+1)W(k-1-m) \right] \quad (5.15)$$

elde edilir. Bu nedenle, (5.9), (5.14) - (5.15) ifadelerinin birleştirilmesi ile $f(w) = \ln(a+bw)$ fonksiyonun diferensiyel dönüşümü aşağıdaki gibi hesaplanabilir[1];

$$F(k) = \begin{cases} \ln(a+bW(0)), & k=0, \\ \frac{b}{a+bW(0)} W(1), & k=1, \\ \frac{b}{a+bW(0)} \left[W(k) - \sum_{m=0}^{k-2} \frac{m+1}{k} F(m+1)W(k-1-m) \right], & k \geq 2. \end{cases} \quad (5.16)$$

5.2. Lane-Emden Rastgele Kompleks Diferensiyel Denklemler

İkinci mertebeden lineer olmayan adi diferensiyel denklem ile modellenebilen tekil başlangıç değer problemleri pek çok fizikçi ve matematikçi tarafından çalışılmıştır. Bu kategorideki denklemlerden biride aşağıda ifade edilen Lane-Emden tipi denklemlerdir.

$$w''(z) + \frac{n}{z} w'(z) + f(z, w) = g(z), \quad (5.17)$$

$$w(0) = A, w'(0) = B.$$

şeklindeki denklemlere $n \geq 0$ aralığında $n \in \mathbb{R}$ reel sayısı için Kompleks Lane-Emden tipi denklemler denir. $n \geq 0$ için $n \in \mathbb{R}$ reel sayısı için A ve B sabittir, $f(z, w)$ sürekli bir fonksiyondur. (5.17) denkleminin analitik çözümü, yukarıdaki başlangıç koşulları için $z = 0$ tekil noktası komşuluğunda daima mümkündür (Davis, 1962). Astrofizikçiler Jonathan H. Lane and Robert Emden (Lane, 1870) tarafından ilk çalışma yapıldığından, denklemler bu araştırmacıların soy isimlerinin birleşimi ile adlandırılmıştır. Aşağıda kompleks Lane-Emden denklemleri rastgele hale getirerek çözüm davranışlarını inceleyelim.

Örnek 5.1. Aşağıdaki rastgele kompleks Lane-Emden denklemini inceleyelim.

$$w''(z) + \frac{3}{z}w'(z) + 3w = 3Bz^3 + 3Az^2 + 15Bz + 8A \quad (5.18)$$

$A, B \sim N(\mu, \sigma^2)$ başlangıç şartları

$$w(0) = 0, w'(0) = 0. \quad (5.19)$$

Çözüm: (5.18) denklemi z ile çarpıldığında

$$zw''(z) + 3w'(z) + 3zw(z) = 3Bz^4 + 3Az^3 + 15Bz^2 + 8Az$$

olur. Sonra her iki tarafın diferensiyel dönüşümü alınır,

$$W(k+1) = \frac{1}{(k+1)(k+3)} [-3 \sum_{r=0}^k \delta(r-1)W(k-r) + 3B\delta(k-4) + 3A\delta(k-3) + 15B\delta(k-2) + 8A\delta(k-1)] \quad (5.20)$$

elde edilir. (5.19) deki başlangıç koşulları $z_0 = 0$ da

$$W(0) = 0, W(1) = 0 \quad (5.21)$$

olarak dönüştürülebilir. (5.21) denklemlerini, $k = 1$ için (5.20) ifadesinde yerine yazılırsa

$k = 1$ için $W(2) = A$ bulunur. Aynı prosedürü uygularsak, $k = 2$ için $W(3) = B$.

Bu şekilde devam edilirse, $W(k) = 0, k \geq 6$ olur. Ters dönüşüm kuralını kullanarak,

$$\begin{aligned} w(z) &= \sum_{k=0}^n W(k)z^k \\ &= Az^2 + Bz^3 \end{aligned}$$

çözümü kapalı bir biçimde elde edilir. Bu aynı zamanda (5.18) denkleminin tam çözümüdür.

$A, B \sim G(\alpha, \beta)$ ise

$$\begin{aligned} M_z(t) &= E[e^{tz}] \\ &= \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha} \end{aligned}$$

$z \sim G(\alpha, \beta)$ olduğunda

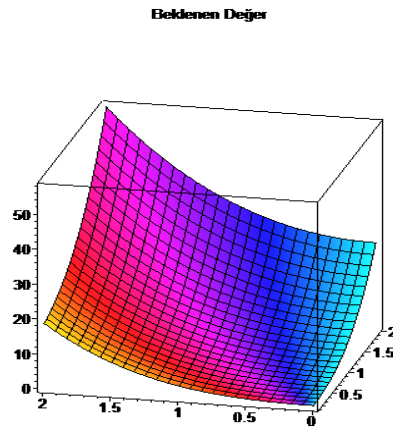
$$E[z] = \alpha\beta, E[z^2] = (\alpha + \alpha^2)\beta^2, \quad Var[z] = \alpha\beta^2$$

$$\begin{aligned} E[w(z)] &= E[Az^2 + Bz^3] \\ &= E[A]z^2 + E[B]z^3 \\ &= \alpha\beta(z^2 + z^3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[w(z)] &= Var[Az^2 + Bz^3] \\ &= Var[A]z^2 + Var[B]z^3 \\ &= \alpha\beta^2(z^2 + z^3). \end{aligned}$$

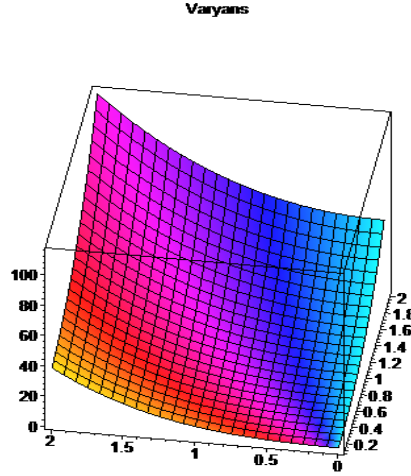
$z \sim G(\alpha, \beta)$ özel olarak $\alpha = 1, \beta = 2$ seçilirse,

$$\begin{aligned} E[w(z)] &= \alpha\beta(z^2 + z^3) \\ &= 2(z^2 + z^3). \end{aligned}$$



Şekil 5.1. $\alpha = 1, \beta = 2$ için
(5.18) denkleminin
beklenen değeri

$$\begin{aligned} Var[w(z)] &= \alpha\beta^2(z^2 + z^3) \\ &= 4(z^2 + z^3). \end{aligned}$$



Şekil 5.2. $\alpha = 1$, $\beta = 2$ için
(5.18) denkleminin
varyansı

bulunur.

Örnek 5.2. Aşağıdaki rastgele kompleks Lane-Emden denklemini inceleyelim.

$$w''(z) + \frac{7}{z} w'(z) + z^2 w = Bz^6 + Az^5 + 40Bz^2 + 27Az, \quad A, B \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (5.22)$$

başlangıç şartları

$$w(0) = 0, w'(0) = 0. \quad (5.23)$$

Çözüm: (5.22) denklemini z ile çarpıldığında

$$zw''(z) + 7w'(z) + z^3 w(z) = Bz^7 + Az^6 + 40Bz^3 + 8Az^2$$

olur. Sonra her iki tarafın diferensiyel dönüşümü alınır,

$$W(k+1)$$

$$= \frac{1}{(k+1)(k+7)} \left[- \sum_{r=0}^k \delta(r-3)W(k-r) + B\delta(k-7) + A\delta(k-6) + 40B\delta(k-3) + 27A\delta(k-2) \right] \quad (5.24)$$

elde edilir. (5.23) daki başlangıç koşulları $z_0 = 0$ da

$$W(0) = 0, W(1) = 0 \quad (5.25)$$

olarak dönüştürülebilir. (5.25) denklemlerini, $k = 1$ için (5.24) ifadesinde yerine yazılırsa $k = 1$ için $W(2) = 0$ bulunur. Aynı prosedürü uygularsak, $k = 2$ için $W(3) = A$, $k = 3$ için $W(4) = B$. Bu şekilde devam edilirse, $W(k) = 0, k \geq 6$ olur. Ters dönüşüm kuralını kullanarak,

$$\begin{aligned} w(z) &= \sum_{k=0}^n W(k)z^k \\ &= Az^3 + Bz^4 \end{aligned}$$

çözümü kapalı bir biçimde elde edilir. Bu aynı zamanda (5.22) denkleminin tam çözümüdür. $A, B \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise

$$\begin{aligned} M_z(t) &= E[e^{tz}] \\ &= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}. \end{aligned}$$

$$E[z] = \mu, \quad E[z^2] = \mu^2 + \sigma^2, \quad Var[w(z)] = \sigma^2.$$

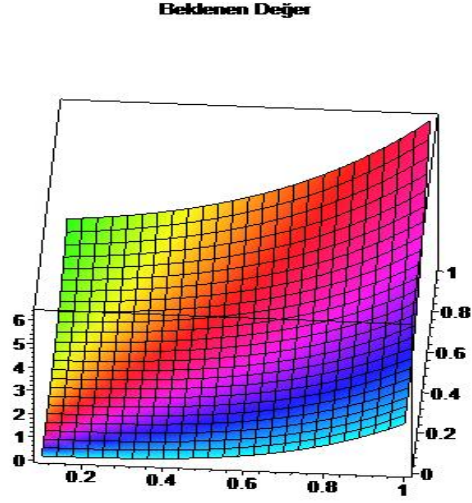
$z \sim N(\mu, \sigma^2)$ olduğunda,

$$\begin{aligned} E[w(z)] &= E[Az^3 + Bz^4] \\ &= E[A]z^3 + E[B]z^4 \\ &= \mu(z^3 + z^4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[w(z)] &= Var[Az^3 + Bz^4] \\ &= Var[A]z^3 + Var[B]z^4 \\ &= \sigma^2(z^3 + z^4). \end{aligned}$$

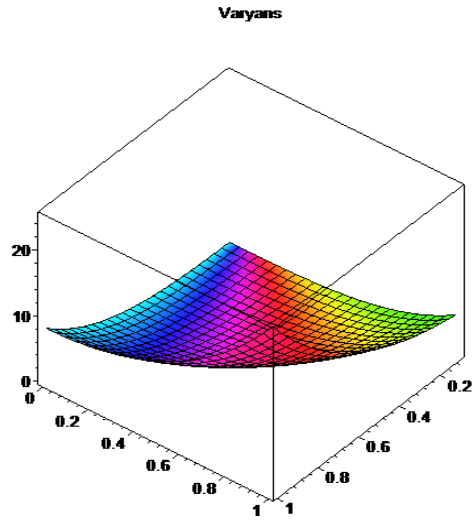
Özel olarak $z \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$ seçilirse,

$$E[w(z)] = (z^3 + z^4)$$



Şekil 5.3. $\mu = 1, \sigma = 2$ değerleri için (5.22) denkleminin beklenen değeri

$$Var[w(z)] = 4(z^3 + z^4)$$



Şekil 5.4. $\mu = 1, \sigma = 2$ değerleri için (5.22) denkleminin varyansı

bulunur.

Örnek 5.3. Aşağıdaki rastgele kompleks Lane-Emden denklemini inceleyelim.

$$w''(z) + \frac{4}{z}w'(z) + zw(z) = Az^7 + 54Az^4, \quad A \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \quad (5.26)$$

başlangıç şartları

$$w(0) = 0, w'(0) = 0. \quad (5.27)$$

Çözüm: (5.26) denklemini z ile çarpıldığında

$$zw''(z) + 4w'(z) + z^2 w(z) = Az^8 + 54Az^5$$

olur. Sonra her iki tarafın diferensiyel dönüşümü alınır,

$$W(k+1) = \frac{1}{(k+1)(k+4)} \left[- \sum_{r=0}^k \delta(r-2)W(k-r) + A\delta(k-8) + 54A\delta(k-5) \right] \quad (5.28)$$

elde edilir. (5.27) daki başlangıç koşulları $z_0 = 0$ da

$$W(0) = 0, W(1) = 0 \quad (5.29)$$

olarak dönüştürülebilir. (5.29) denklemlerini, $k = 1$ için (5.28) ifadesinde yerine yazılırsa $k = 1$ için $W(2) = 0$ bulunur. Aynı prosedürü uygularsak, $k = 2$ için $W(3) = 0$, $k = 3$ için $W(4) = 0$, $k = 4$ için $W(5) = 0$, $k = 5$ için $W(6) = A$. Bu şekilde devam edilirse, $W(k) = 0, k \geq 7$ olur. Ters dönüşüm kuralını kullanarak,

$$\begin{aligned} w(z) &= \sum_{k=0}^n W(k)z^k \\ &= Az^6 \end{aligned}$$

çözümü kapalı bir biçimde elde edilir. Bu aynı zamanda (5.26) denkleminin tam çözümüdür. $z \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ ise

$$\begin{aligned} M_z(\alpha, \beta, t) &= E[e^{tz}] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + r} \right) \frac{t^k}{k!} \\ E[z] &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \text{Var}[z] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}. \end{aligned}$$

Beklenen değeri

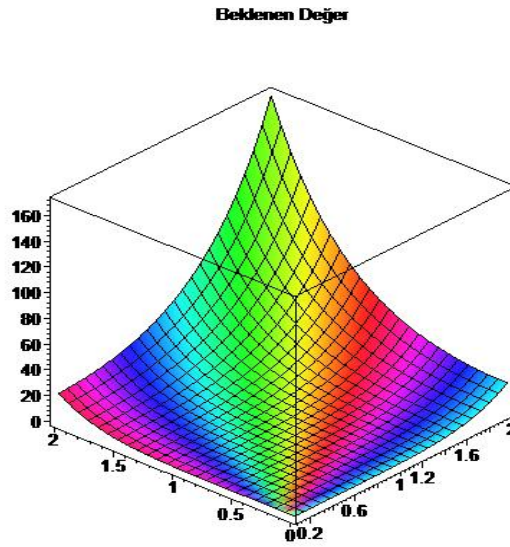
$$\begin{aligned} E[w(z)] &= E[Az^6] \\ &= E[A]z^6 \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} z^6. \end{aligned}$$

Varyansı

$$\begin{aligned} Var[w(z)] &= Var[Az^6] \\ &= Var[A]z^6 \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)} z^6 \end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak $z \sim Beta(\alpha = 1, \beta = 2)$ seçilirse beklenen değeri

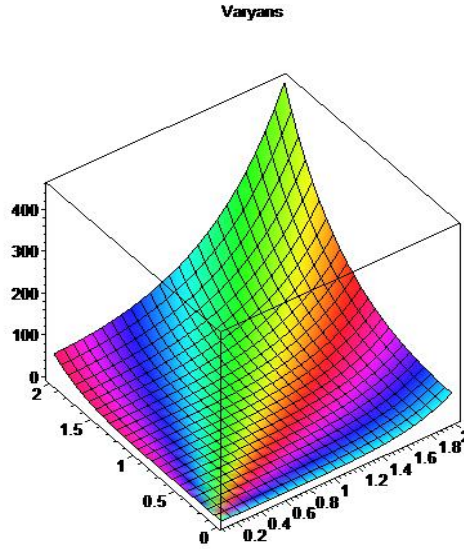
$$\begin{aligned} E[w(z)] &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta} z^6 \\ &= \frac{z^6}{3}. \end{aligned}$$



Şekil 5.5. $\alpha = 1$, $\beta = 2$ değerleri için (5.26) denkleminin beklenen değeri

Varyansı

$$\begin{aligned} Var[w(z)] &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} z^6 \\ &= \frac{z^6}{18}. \end{aligned}$$



Şekil 5.6. $\alpha = 1$, $\beta = 2$ değerleri için (5.26) denkleminin varyansı

Örnek 5.4.

$$w''(z) + \frac{3}{z}w' + 8A\left(e^w + e^{\frac{w}{2}}\right) = 0 \quad (5.30)$$

başlangıç koşulları

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0 \quad (5.31)$$

$A \sim U(0,1)$ düzgün dağılımına sahip bağımsız rastgele kompleks Lane-Emden denklemini inceleyelim.

Çözüm: (5.30) denkleminin her iki tarafını z ile çarpalım.

$$zw''(z) + 3w'(z) + 8zA \left(e^w + e^{\frac{w}{2}} \right) = 0$$

denklemine diferensiyel dönüşüm uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^k \delta(m-1)(k-m+1)(k-m+2)W(k-m+2) + 3(k+1)W(k+1) \\ + 8A \sum_{m=0}^k \delta(m-1)F(k-m) + 8A \sum_{m=0}^k \delta(m-1)G(k-m) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $m = 1$ için,

$$\begin{aligned} k(k+1)W(k+1) + 3(k+1)W(k+1) \\ + 8A \sum_{m=0}^k \delta(0)F(k-1) + 8A \sum_{m=0}^k \delta(0)G(k-1) = 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} W(k+1) = \frac{1}{(k+1)(k+3)} \left[-8A \sum_{m=0}^k \delta(m-1)F(k-m) \right. \\ \left. - 8A \sum_{m=0}^k \delta(m-1)G(k-m) \right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

elde edilir. (5.31) deki başlangıç koşulları $z_0 = 0$ da

$$W(0) = 0, W(1) = 0 \quad (5.33)$$

olarak dönüştürülebilir. (5.33) denklemlerini, $k = 1$ için (5.32) ifadesinde yerine yazılırsa $k = 1$ için $W(2) = -2$ bulunur. Aynı prosedürü uygularsak, $k = 2$ için $W(3) = 0$, $k = 3$ için $W(4) = 1$. Ters dönüşüm uygulanarak

$$\begin{aligned} w(z) &= \sum_{k=0}^n W(k)z^k \\ &= -2Az^2 + A^2z^4 - \frac{2A^3}{3}z^6 + \dots \end{aligned}$$

çözümü kapalı bir biçimde elde edilir. Bu aynı zamanda (5.30) denkleminin tam çözümüdür. $z \sim U(\alpha, \beta)$

$$M_z(t) = E[e^{tz}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t}$$

$z \sim U(\alpha, \beta)$, $E[z] = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $Var[z] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$ bu momentleri kullanırken, x ve y bağımsız rastgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$, bu yaklaşık formüller kullanılarak, beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi hesaplanabilir. $A, B \sim U(\alpha, \beta)$ beklenen değeri,

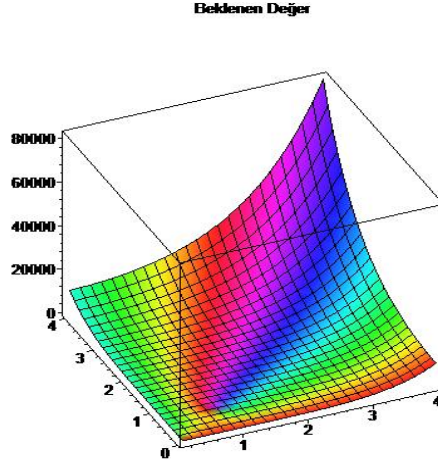
$$\begin{aligned} E[w(z)] &= E \left[-2Az^2 + A^2 z^4 - \frac{(2A^3)}{3} z^6 + \dots \right] \\ &= -2E[A]z^2 + E[A^2]z^4 - \frac{2}{3}E[A^3]z^6 + \dots \\ &= -\frac{2(\alpha + \beta)}{2}z^2 + \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}z^4 - \frac{2}{3}\frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3}{4}z^6 + \dots \end{aligned}$$

Varyansı

$$\begin{aligned} Var[w(z)] &= Var \left[-2Az^2 + A^2 z^4 - \frac{2A^3}{3} z^6 + \dots \right] \\ &= -2Var[A]z^2 + Var[A^2]z^4 - \frac{2}{3}Var[A^3]z^6 + \dots \\ &= -\frac{2(\alpha - \beta)^2}{12}z^2 + \left(\frac{4\alpha^2}{45} + \frac{4\beta^2}{45} - \frac{1}{45}\alpha^2\beta^3 - \frac{2}{15}\alpha^2\beta^2 - \frac{1}{45}\alpha^3\beta \right) z^4 \\ &\quad - \frac{2}{3} \left(\frac{9}{112}\beta^6 + \frac{1}{56}\alpha\beta^5 - \frac{5}{112}\alpha^2\beta^4 - \frac{3}{28}\alpha^3\beta^3 - \frac{5}{112}\alpha^4\beta^2 + \frac{1}{56}\alpha^5\beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{112}\alpha^6 \right) z^6 + \dots \end{aligned}$$

$z \sim U(\alpha, \beta)$ özel olarak $\alpha = 2, \beta = 1$ seçilirse beklenen değer,

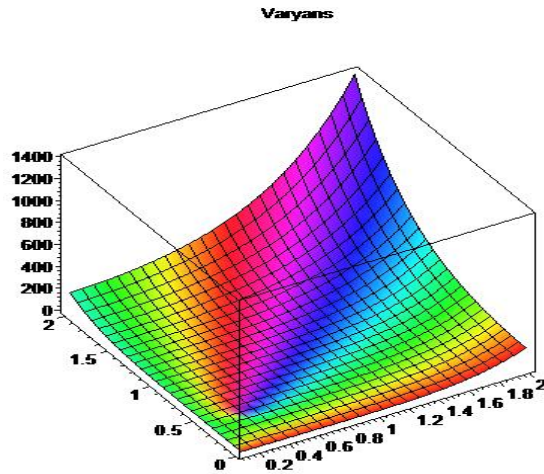
$$\begin{aligned} E[w(z)] &= -\frac{2(\alpha + \beta)}{2}z^2 + \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}z^4 - \frac{2}{3}\frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3}{4}z^6 \\ &= -3z^2 + \frac{7}{3}z^4 - \frac{5}{2}z^6, \end{aligned}$$



Şekil 5.7. $\alpha = 2, \beta = 1$ değerleri için (5.30) denkleminin beklenen değeri

Varyansı

$$\begin{aligned} Var[w(z)] &= -\frac{2(\alpha-\beta)^2}{12}z^4 + \left(\frac{4\alpha^2}{45} + \frac{4\beta^2}{45} - \frac{1}{45}\alpha\beta^3 - \frac{2}{15}\alpha^2\beta^2 - \frac{1}{45}\alpha^3\beta\right)z^{16} - \\ &\frac{2}{3}\left(\frac{9}{112}\beta^6 + \frac{1}{56}\alpha\beta^5 - \frac{5}{112}\alpha^2\beta^4 - \frac{3}{28}\alpha^3\beta^3 - \frac{5}{112}\alpha^4\beta^2 + \frac{1}{56}\alpha^5\beta + \frac{9}{112}\alpha^6\right)z^{36} \\ &= -\frac{z^4}{6} - \frac{2}{45}z^{16} - \frac{67}{28}z^{36}. \end{aligned}$$



Şekil 5.8. $\alpha = 2, \beta = 1$ değerleri için (5.30) denkleminin varyansı

bulunur.

Örnek 5.5.

$$w''(z) + \frac{5}{z}w'(z) - 12Aw(z) = 4Aw(z) \ln w(z) \quad (5.34)$$

başlangıç koşulları

$$w(0) = 1, w'(0) = 0 \quad (5.35)$$

$A \sim N(\alpha, \beta)$ normal dağılımına sahip bağımsız rastgele kompleks Lane-Emden denklemini inceleyelim.

Çözüm: (5.34) denklemini z ile çarpalım.

$$zw''(z) + 5w'(z) - 12Azw(z) = 4Azw(z) \ln w(z)$$

denklemine diferensiyel dönüşüm uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^k \delta(m-1)(k-m+1)(k-m+2)W(k-m+2) + 5(k+1)W(k+1) \\ & - 12A \sum_{m=0}^k \delta(m-1)W(k-m) \\ & = 4A \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} \delta(k_1-1)W(k_2-k_1)F(k-k_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $m = 1$ için,

$$\begin{aligned} & k(k+1)W(k+1) + 5(k+1)W(k+1) \\ & - 12A \sum_{m=0}^k \delta(m-1)W(k-m) \\ & = 4A \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} \delta(k_1-1)W(k_2-k_1)F(k-k_2) \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\begin{aligned} W(k+1) = \frac{1}{(k+1)(k+5)} & \left[12A \sum_{m=0}^k \delta(m-1)W(k-m) \right. \\ & \left. + 4A \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} \delta(k_1-1)W(k_2-k_1)F(k-k_2) \right] \end{aligned} \quad (5.36)$$

denklemini elde edilir. (5.35) deki başlangıç koşulları $z_0 = 0$ da

$$W(0) = 1, W(1) = 0 \quad (5.37)$$

olarak dönüştürülebilir. (5.37) denklemlerini, $k = 1$ için (5.36) ifadesinde yerine yazılırsa $k = 1$ için $W(2) = A$ bulunur. Aynı prosedürü uygularsak, $k = 2$ için $W(3) = 0, k = 3$ için $W(4) = \frac{1}{2}$. Ters dönüşüm uygulanarak

$$\begin{aligned} w(z) &= \sum_{k=0}^n W(k)z^k \\ &= 1 + Az^2 + \frac{A^2}{2}z^4 + \frac{A^3}{6}z^6 + \dots \end{aligned}$$

çözümü kapalı bir biçimde elde edilir. Bu aynı zamanda (5.34) denkleminin tam çözümüdür. $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişken olsun. Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

dir. $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentlerinin beklenen değeri ve varyansı

$$E[x] = \mu, E[x^2] = \mu^2 + \sigma^2 \text{ ve } Var[x] = \sigma^2$$

Bu momentler kullanılarak ve x ve y rastgele bağımsız değişken ise $E[xy] = E[x]E[y]$ olduğundan, beklenen değer ve varyansın yaklaşık formülleri

$$E[w(k, h)] = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n E[w(k, h)]x^k y^h$$

$z \sim N(\mu, \sigma^2)$ beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E[w(z)] &= E \left[1 + Az^2 + \frac{A^2}{2}z^4 + \frac{A^3}{6}z^6 + \dots \right] \\ &= 1 + E[A]z^2 + \frac{1}{2}E[A^2]z^4 + \frac{1}{6}E[A^3]z^6 \dots \\ &= 1 + \mu z^2 + \frac{1}{2}(\mu^2 + \sigma^2)z^4 + \frac{1}{6}(\mu^3 + 3\mu\sigma^2)z^6 + \dots \end{aligned}$$

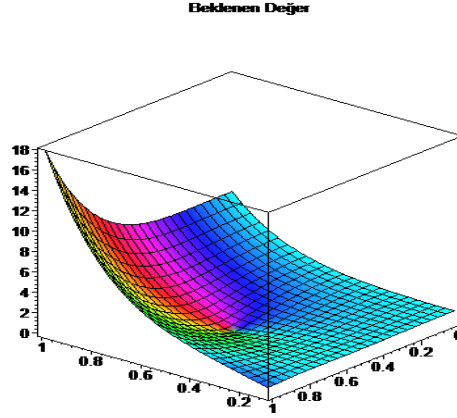
varyansı

$$\begin{aligned} Var[w(z)] &= Var \left[1 + Az^2 + \frac{A^2}{2}z^4 + \frac{A^3}{6}z^6 + \dots \right] \\ &= Var[A]z^2 + \frac{1}{2}Var[A^2]z^4 + \frac{1}{6}Var[A^3]z^6 + \dots \\ &= \sigma^2 z^2 + \frac{1}{2}(4\mu^2\sigma^2 + 2\sigma^4)z^4 + \frac{1}{6}(9\mu^4\sigma^2 + 15\sigma^6 + 36\mu^2\sigma^4)z^6 \end{aligned}$$

$z \sim N(\mu, \sigma^2)$ özel olarak $\mu = 2, \sigma = 1$ seçilirse beklenen değeri,

$$E[w(z)] = 1 + \mu z^2 + \frac{1}{2}(\mu^2 + \sigma^2)z^4 + \frac{1}{6}(\mu^4 + 3\mu\sigma^2)z^6$$

$$= 1 + z^2 + \frac{5}{2}z^4 + \frac{7}{3}z^6.$$

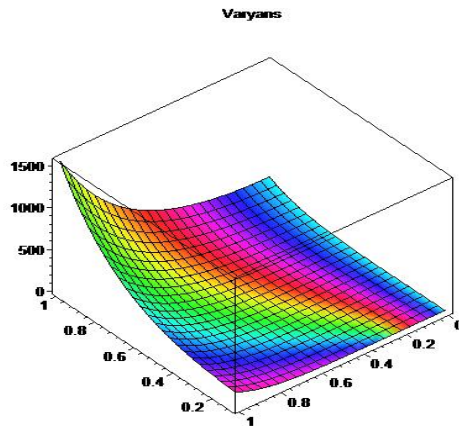


Şekil 5.9. $\mu = 2, \sigma = 1$ değerleri için (5.34) denkleminin beklenen değeri

Varyansı,

$$Var[w(z)] = 1 + \mu z^2 + \frac{1}{2}(\mu^2 + \sigma^2)z^4 + \frac{1}{6}(\mu^4 + 3\mu\sigma^2)z^6$$

$$= z^2 + 9z^4 + 50z^6.$$



Şekil 5.10. $\mu = 2, \sigma = 1$ değerleri için (5.34) denkleminin varyansı

5.3. Kompleks Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sumudu Yöntemleri ile Çözümü

Bu bölümde kompleks diferansiyel denklemlerin Sumudu yöntemi ile çözümü ele alınacaktır.

5.3.1. İki Boyutlu Sumudu Dönüşümü

$$\mathcal{L}_2[g(x, y); (r, s)] = \int_0^\infty \int_0^\infty g(x, y) e^{-(rx+sy)} dx dy \quad (5.38)$$

bu fonksiyonun değişkenleri ile ilgili bir kuvvet serisi dönüşümüne sahip olması durumunda, Sumudu dönüşümü iki boyutlu Sumudu dönüşümü için açık ve nispeten birleşik bir yol sağlar. İki değişkenli fonksiyonun (5.38) iki boyutlu Laplace dönüşümü tekniği xy – düzleminin pozitif çeyreğinde tanımlanır.

5.3.1.Tanım: $g(t, x); t, x \in \mathbb{R}^+$ sonsuz bir dizi şeklinde ifade edilebilen bir fonksiyon olsun, o halde, iki boyutlu Sumudu dönüşümü,

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \mathbb{S}_2[g(t, x); (u, v)] = \mathbb{S}[\mathbb{S}\{g(t, x); t \rightarrow u\}; x \rightarrow v] \\ &= \frac{1}{uv} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{t}{u} + \frac{x}{v}\right)} g(t, x) dt dx \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$G(u, v) = \mathcal{L}_2 \left[g(x, y); \left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v} \right) \right] \quad (5.40)$$

Sumudu dönüşümü ile Laplace dönüşümü arasındaki ilişki (5.40) daki gibi ifade edilebilir.

Teorem 5.3.1. $g(x, y), x, y \in \mathbb{R}^+$ reel değerli bir fonksiyonu olsun. O halde,

$$\mathbb{S}_2[g(x + y); (u, v)] = \frac{1}{u - v} \{uG(u) - vG(v)\}. \quad (5.41)$$

g , popülasyon yoğunluğunu, x yaşını ve y zamanını temsil eder, ya da tam tersi. $(x - y)$ örneği, Matematiksel Biyoloji'de bu işlemlerle sık sık karşılaşılan biyoloji açısından daha da

ilginçtir. $x \geq y$ durumun da ispatı basit ve yeterlidir. Bu nedenle, geometrik olarak, birinci çeyreği iki eşit parçaya bölen çizgi, η eksenini (alt kısım Q_1 ve üst kısım Q_2 ile temsil edilir) temsil etse de, hem ikinci hem de dördüncü çeyrekleri bölmek ζ - eksen (sırayı yukarı dönük) ve ζ - eksen (başlangıç noktasından dördüncü çeyreğe doğru ok), o zaman test şu şekildedir: Kabul edelim ki g bir çift fonksiyon olsun, o halde $g(0)$ tek olduğunda

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_2[g(x-y); (u, v)] &= \frac{1}{uv} \int \int_{Q_1} g(x-y) e^{-\left(\frac{x}{u} + \frac{y}{v}\right)} dx dy \\ &\quad - \frac{1}{uv} \int \int_{Q_2} g(x-y) e^{-\left(\frac{x}{u} + \frac{y}{v}\right)} dx dy. \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$x = \frac{1}{2}(\zeta + \eta); y = \frac{1}{2}(\zeta - \eta)$$

değişken dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} \int \int_{Q_1} g(x-y) e^{-\left(\frac{x}{u} + \frac{y}{v}\right)} dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^\infty g(\zeta) d\zeta \int_\zeta^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right)\zeta} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right)\eta} d\eta \\ &= \frac{uv}{u-v} \int_0^\infty e^{-\frac{\zeta}{v}} g(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{uv^2}{u-v} G(u). \end{aligned}$$

Benzer şekilde,

$$\int \int_{Q_1} g(x-y) e^{-\left(\frac{x}{u} + \frac{y}{v}\right)} dx dy = \frac{v^2 u}{u-v} G(u).$$

Bu nedenle, g çift fonksiyon için

$$\mathbb{S}_2[g(x-y); (u, v)] = \frac{uG(u) + vG(v)}{u-v} \quad (5.43)$$

ve g bir tek fonksiyon ise

$$\mathbb{S}_2[g(x-y)]; (u, v) = \frac{uG(u) - vG(v)}{u + v} \quad (5.44)$$

$G(u) = \mathbb{S}[g(t)] = \int_0^\infty g(ut)e^{-t}dt$, $u \in (-\tau_1, \tau_2)$ Sumudu dönüşümünden

$G(u)$ ve (5.43) denklemlerinden, eğer g çift bir fonksiyonsa, o zaman açıktır ki

$$(u + v)\mathbb{S}_2[g(x-y)] = (u - v)\mathbb{S}_2[g(x+y)] \quad (5.45)$$

elde edilir. Kısmi türevlere aşağıdaki gibi SDM uygulanırsa: $g(0, a) = G_0(a)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_2 \left[\frac{dg}{dt} g(t, a); (u, v) \right] \\ = \frac{1}{uv} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{t}{u} + \frac{s}{v}\right)} \frac{\partial}{\partial t} g(t, a) dt da = \frac{1}{v} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{v}} \left\{ \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}} g(t, a) dt \right\} da. \end{aligned}$$

(5.40) denkleminde verilen iç integral,

$$\frac{G(u, a) - g(0, a)}{u} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_2 \left[\frac{\partial g(t, a)}{\partial t}; (u, v) \right] &= \frac{1}{u} \left\{ \frac{1}{v} \int_0^\infty e^{-\frac{a}{v}} G(u, a) da - \frac{1}{v} \int_0^\infty e^{-\frac{a}{v}} g_0(a) da \right\} \\ &= \frac{1}{u} \left\{ \frac{1}{v} G(u, v) - G_0(v) \right\} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_2 \left[\frac{\partial g(t, a)}{\partial a}; (u, v) \right] &= \frac{1}{v} \int_0^\infty e^{-\frac{a}{v}} \left\{ \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}} \frac{\partial}{\partial a} g(t, a) dt \right\} da \\ &= \frac{1}{v} \int_0^\infty e^{-\frac{a}{v}} \frac{\partial}{\partial a} G(u, a) da \end{aligned}$$

$$= G_u(u, v). \quad (5.48)$$

Alternatif olarak,

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_2 \left[\frac{\partial g(t, a)}{\partial t}; (u, v) \right] &= \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{a}{v}} \left\{ \frac{1}{v} \int_0^\infty e^{-\frac{a}{u}} \frac{\partial g}{\partial a} da \right\} dt \\
&= \frac{1}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{u}} \frac{1}{v} [G(t, v) - g(t, 0)] dt \\
&= \frac{1}{v} (G(u, v) - G_0(u))
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Burada $G(u, 0) = G_0(u)$ ve $G(0, v) = G_0(v)$. (5.47) ve (5.48) denklemlerinden

$$G_v(u, v) = \frac{G(u, v) - G_0}{v}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım: (Hassan Eltayeb, 2010): $g(t, x)$ ve $h(t, x)$ fonsiyonları iki boyutlu Sumudu dönüşümüne sahip olsun. Sonra $g(t, x)$ ve $h(t, x)$ 'nin iki boyutlu konvülasyonun iki boyutlu Sumudu dönüşümü,

$$(g ** h)(t, x) = \int_0^x \int_0^t g(\zeta, \eta) h(t - \zeta, x - \eta) d\zeta d\eta$$

$$\mathbb{S}_2[(g ** h)(t, x); u, v] = uvG(u, v)H(u, v)$$

Ayrıca, aşağıda iki boyutlu konvölasyonun x e göre kısmi türevinin iki boyutlu Sumudu dönüşümü elde edildi,

$$\mathbb{S}_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} (g ** h)(t, x); u, v \right] = uv \mathbb{S}_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} (t, x); u, v \right] = \mathbb{S}_2[h(t, x); u, v]$$

yada

$$uv \mathbb{S}_2[f(t, x); u, v] \mathbb{S}_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} h(t, x); u, v \right].$$

Böylece, iki boyutlu fonsiyonun Sumudu ve Laplace dönüşümü arasındaki ilişki,

$$\mathbb{S}_2[(g ** h)(t, x); u, v] = \frac{1}{uv} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_x [g ** h](t, x)]$$

PDE'leri Sumudu dönüşümünü kullanarak çözmek için, bu dönüşümün kısmi türevlerine ihtiyaç vardır. Böylece, x 'e göre ikinci mertebeden kısmi türevlerine iki boyutlu Sumudu dönüşümünün uygulanması ile

$$\mathbb{S}_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} g(t, x); u, v \right] = \frac{1}{v^2} G(u, v) - \frac{1}{v^2} G(u, 0) - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial x} G(u, 0)$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde, t 'ye göre ikinci mertebeden kısmi türev içinde verilir;

$$\mathbb{S}_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} g(t, x); u, v \right] = \frac{1}{u^2} G(u, v) - \frac{1}{u^2} G(0, v) - \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial t} G(0, v).$$

Örnek 5.6.

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} + x + ct \quad (5.50)$$

ve

$y(x, 0) = 0, y_t(x, 0) = \sin x, y(0, t) = 0, y(1, t) = 0$ başlangıç-sınır değerleri ile verilen homojen olmayan dalga denklemini çözünüz.

Çözüm: Fonksiyonun Sumudu dönüşümü

$$\mathbb{S}[y(x, t)] = \frac{1}{u} \int_0^\infty y(x, t) e^{-\frac{t}{u}} dt = Y(x, u) = Y$$

(5.50) 'nin her iki tarafına Sumudu dönüşümü uygulanırsa,

$$\mathbb{S}[y_{tt}] = \mathbb{S}[c^2 y_{xx}] + \mathbb{S}[x + ct]$$

$$c^2 \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{Y(x, u)}{u^2} - \frac{y_t(x, 0)}{u^2} - \frac{y(x, 0)}{u} - x - cu$$

$$c^2 \frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{Y}{u^2} = -\frac{\sin x}{u^2} - x - cu$$

denklemin homojen kısmın çözümü

$$Y_h(x, u) = c_1 e^{\frac{x}{cu}} + c_2 e^{-\frac{x}{cu}}$$

elde edilir. Homojen olmayan diferansiyel denklemlerin özel çözümü kolayca elde edilir.

$$Y_p(x, t) = A_1 \sin x + B_1 \cos x + A_2 x + B_2$$

$$Y_p'(x, t) = A_1 \cos x - B_1 \sin x + A_2$$

$$Y_p''(x, t) = -A_1 \sin x - B_1 \cos x$$

$$c^2(-A_1 \sin x + B_1 \cos x + A_2 x + B_2) = \frac{-\sin x}{u^2} - x - cu$$

$$A_1 \left(c^2 + \frac{1}{u^2} \right) = \frac{1}{u^2} \quad , \quad B_1 = 0$$

$$A_1 = \frac{1}{c^2 u^2 + 1}, \frac{A_2}{u^2} = -1, A_2 = -u^2 \quad B_2 = cu^3$$

bilinmeyen katsayılar yerine yazılırsa,

$$Y_p(x, t) = \sin x \left(\frac{1}{1 + c^2 u^2} \right) + xu^2 + cu^3$$

özel çözüm bulunur.

$Y(x, t) = \mathbb{S}^{-1}[Y_p(x, t)]$ olduğundan, bulunan denklemin ters Sumudu dönüşümü

$$= \sin x \mathbb{S}^{-1} \left[\frac{1}{1 + c^2 u^2} \right] + x \mathbb{S}^{-1}[u^2] + c \mathbb{S}^{-1}[u^3]$$

$$= \sin x \cos(ct) + \frac{xt^2}{2} + \frac{ct^3}{6}$$

elde edilir.

5.3.2. Birinci Mertebeden Sabit Katsayılı Kompleks Diferensiyel Denklemlerin Sumudu Dönüşüm Yöntem Çözümü

Aşağıda birinci mertebeden sabit katsayılı kompleks diferensiyel denklemlerin Sumudu dönüşüm yöntemi ile çözümleri incelenecektir.

Örnek5.8.

$$\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - 5w = 0, \quad w(x, 0) = B e^{3z} \quad (5.51)$$

verilen kısmi diferensiyel denkleminin $A, B \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişkenlerin yaklaşık analitik çözümünü Sumudu yöntemi ile çözünüz.

Çözüm: (5.67) denkleminde

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right) - 5w = 0$$

elde edilir. Eğer verilen denklemde $w = u + iv$ yazılırsa,

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} - i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - 5(u + iv) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - 5u = 0$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} - 5v = 0$$

eşitliklerine Sumudu Dönüşümü uygulanırsa,

$$S[u(x, y)] = R_1(x, s)$$

$$S[v(x, y)] = R_2(x, s)$$

olduğunda,

$$\frac{1}{s} [R_2(x, s) - v(x, 0)] - 5R_1(x, s) = 0$$

$$-\frac{1}{s} [R_1(x, s) - u(x, 0)] - 5R_2(x, s) = 0$$

elde edilen Sumudu Dönüşümlerine Cramer kuralı uygulanırsa,

$$-5R_1(x, s) + \frac{1}{s} R_2(x, s) = \frac{v(x, 0)}{s}$$

$$-\frac{1}{s} R_1(x, s) - 5R_2(x, s) = -\frac{u(x, 0)}{s}.$$

$$\begin{vmatrix} -5 & \frac{1}{s} \\ -\frac{1}{s} & -5 \end{vmatrix} = 25 + \frac{1}{s^2} = \Delta$$

$$R_1(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{v(x, 0)}{s} & \frac{1}{s} \\ -\frac{u(x, 0)}{s} & -5 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{Be^{3x}}{1 + (5s)^2}$$

$$R_2(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 2sv(x, 0) \\ -\frac{1}{s} & -2su(x, 0) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{Be^{3x}5s}{(5s)^2 + 1}$$

denklemlerine Ters Sumudu Dönüşümü alarak,

$$u(x, y) = S^{-1}[R_1(x, s)]$$

$$= S^{-1} \left[\frac{Be^{3x}}{1 + (5s)^2} \right]$$

$$= Be^{3x} \cos(5y)$$

$$v(x, y) = S^{-1}[R_2(x, y)]$$

$$= S^{-1} \left[\frac{Be^{3x}5s}{(5s)^2 + 1} \right]$$

$$= Be^{3x} \sin(5y)$$

elde edilir. O halde

$$w(z) = Be^{3x} [\cos(5y) + i \sin(5y)]$$

$$= Be^{4z - \bar{z}}$$

bulunur. $A, B \sim N(\mu, \sigma^2)$ Normal dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişken olsun. Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

dir. $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ bağımsız rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentlerinin beklenen değeri ve varyansı

$$E[x] = \mu, E[x^2] = \mu^2 + \sigma^2 \text{ ve } Var[x] = \sigma^2$$

Bu momentler kullanılarak ve x ve y rastgele bağımsız değişken ise $E[xy] = E[x]E[y]$ olduğundan, beklenen değer ve varyansın yaklaşık formülleri

$$E[w(k, h)] = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n E[w(k, h)] x^k y^h$$

$z \sim N(\mu, \sigma^2)$ beklenen değeri,

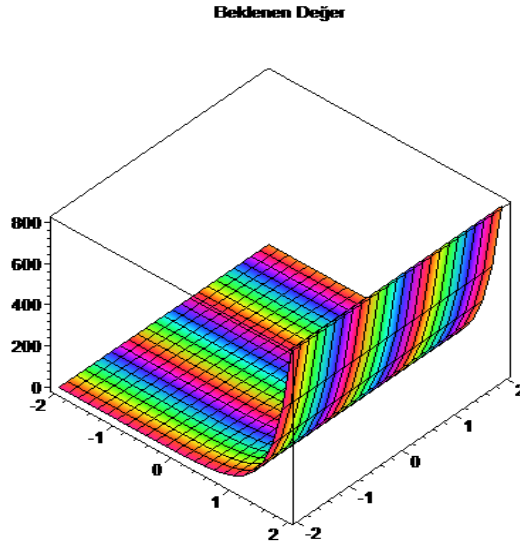
$$\begin{aligned} E[w(z)] &= E[B]e^{z-\bar{z}} \\ &= \mu e^{z-\bar{z}}. \end{aligned}$$

Varyansı

$$\begin{aligned} Var[w(z)] &= Var[B]e^{z-\bar{z}} \\ &= \sigma^2 e^{z-\bar{z}}. \end{aligned}$$

Özel olarak, $\mu = 2, \sigma^2 = 1$ seçilirse beklenen değeri,

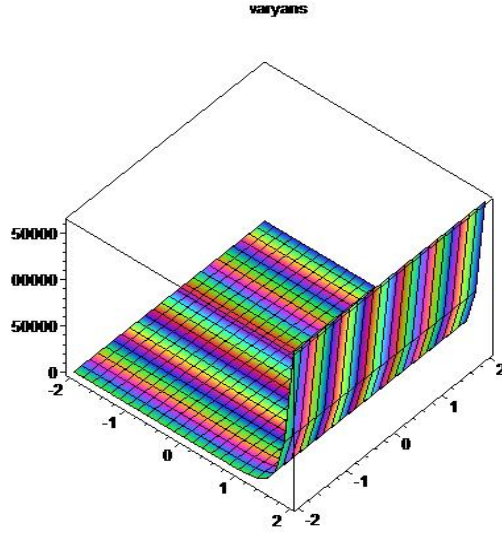
$$E[w(z)] = 2e^{4z-\bar{z}}$$



Şekil 5.11. $\mu = 2, \sigma^2 = 1$ değerleri için (5.67) denkleminin beklenen değeri

varyansı,

$$\text{Var}[w(z)] = e^{8z-2\bar{z}}$$



Şekil 5.12. $\mu = 2$, $\sigma^2 = 1$ değerleri için (5.67) denkleminin varyansı

elde edilir.

Örnek 5.9.

$$w_z - w_{\bar{z}} = A + B, \quad w(x, 0) = (A + B)x \quad (5.68)$$

verilen kısmi diferensiyel denkleminin $A, B \sim G(\alpha, \beta)$ gamma dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişken yaklaşık analitik çözümünü Sumudu yöntemi ile çözünüz.

Çözüm: (5.68) denkleminde

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= w_z = \frac{1}{2} [w_x - iw_y] \\ \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} &= w_{\bar{z}} = \frac{1}{2} [w_x + iw_y] \end{aligned}$$

eşitlikleri yerine $w = u + iv$ yazılırsa,

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} - i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = A + B$$

elde edilir.

$$-\frac{\partial v}{\partial y} = A + B$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y} i = 0$$

eşitliklerine Sumudu Dönüşümü uygulanırsa,

$$S[u(x, y)] = R_1(x, s)$$

$$S[v(x, y)] = R_2(x, s)$$

olduğunda,

$$\frac{1}{s} [R_2(x, s) - v(x, 0)] = A + B$$

$$-\frac{1}{s} [R_1(x, s) - u(x, 0)] = 0.$$

elde edilen Sumudu Dönüşümlerine Cramer kuralı uygulanırsa,

$$R_1(x, s) = u(x, 0) = (A - B)x,$$

$$R_2(x, s) = v(x, 0) + s(A + B) = s(A + B)$$

denklemlerine Ters Sumudu Dönüşümü alarak,

$$u(x, y) = S^{-1}[(A - B)x]$$

$$= (A - B)x$$

$$v(x, y) = S^{-1}[s(A + B)]$$

$$= (A + B)y$$

elde edilir. O halde

$w(z) = Az + B\bar{z}$ bulunur. $z \sim G(\alpha, \beta)$ olduğunda

$$E[z] = \alpha\beta, E[z^2] = (\alpha + \alpha^2)\beta^2, \quad Var[z] = \alpha\beta^2$$

$$E[w(z)] = E[Az + B\bar{z}]$$

$$= E[A]z + E[B]\bar{z}$$

$$= \alpha\beta(z + \bar{z}).$$

$$Var[w(z)] = Var[Az + B\bar{z}]$$

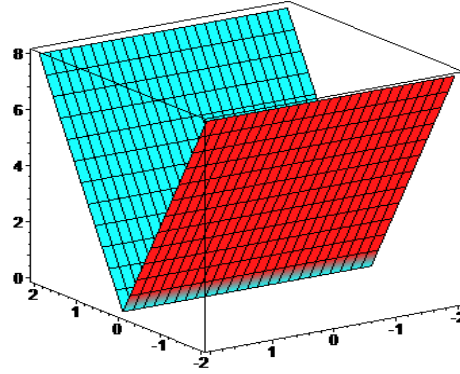
$$= Var[A]z^2 + Var[B]\bar{z}^2$$

$$= \alpha\beta^2(z^2 + \bar{z}^2).$$

Özel olarak $\alpha = 1, \beta = 2$ seçilirse beklenen değeri,

$$E[w(z)] = 2(z + \bar{z})$$

Beklenen Değer

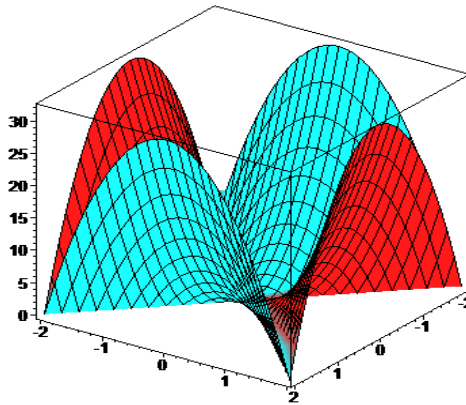


Şekil 5.13. $\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (5.68) denkleminin beklenen değeri

Varyansı,

$$Var[w(z)] = 4(z^2 + \bar{z}^2)$$

varyans



Şekil 5.14. $\alpha = 1, \beta = 2$ değerleri için (5.68) denkleminin varyansı

5.5. İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

$F(x, y)$ tanım kümesinde analitik ve sürekli bir fonksiyon olsun. $F(k, h)$

$$F(k, h) = \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{x=0, y=0} \quad (5.69)$$

ile tanımlıdır (Chen ve Ho, 1999) ve $f(k, h)$ kısaca t işlevi olarak adlandırılan dönüştürülmüş bir işlemdir. $f(k, h)$ 'nin diferansiyel ters dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} F(k, h) x^k y^h \quad (5.70)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k! h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{x=0, y=0} x^k y^h \quad (5.71)$$

denklem (5.71), iki boyutlu diferansiyel dönüşüm kavramının iki boyutlu Taylor serisi açılımından türetilmesini sağlar (Chen ve Ho, 1999).

Teorem 5.5.1. $w(x, y) = u(x, y) + v(x, y)$, $W(k, h) = U(k, h) + V(k, h)$.

Teorem 5.5.2. $w(x, y) = Nu(x, y)$, $W(k, h) = NU(k, h)$.

Teorem 5.5.3. $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$, $W(k, h) = (k + 1)U(k + 1, h)$.

Teorem 5.5.4. $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$, $W(k, h) = (h + 1)U(k, h + 1)$.

Teorem 5.5.5. $w(x, y) = \frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$

$W(k, h) = (k + 1)(k + 2) \dots (k + r)(h + 1)(h + 2) \dots (h + s)U(k + r, h + s)$.

Teorem 5.5.6. $u(x, y) = u(x, y)v(x, y)$

$$W(k, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(r, h - s)V(k - r, s) .$$

Teorem 5.5.7. $w(x, y) = x^m y^n$

$$W(k, h) = \delta(k - m, h - n) = \delta(k - m)\delta(h - n) ,$$

$$\delta(k - m) = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad \delta(h - n) = \begin{cases} 1, & h = n. \\ 0, & h \neq n. \end{cases}$$

Gerçek uygulamalarda, $w(x, y)$ fonksiyonu sonlu bir seri tarafından ifade edilir ve denklemini aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) x^k y^h. \quad (5.72)$$

(5.72) denklemini

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{h=n+1}^{\infty} W(k, h) x^k y^h$$

önemsiz olduğu anlamına gelir.

6. Birinci Mertebeden Lineer Rastgele Kompleks Denklemler

Aşağıda ifade edilen kompleks kısmi diferensiyel denklemleri çözmek için iki boyutlu diferensiyel dönüşüm yöntemi(DDY) kullanılacaktır. $w = w(z; z)$ adi kompleks fonksiyon olsun. Burada $z = x + iy$, $w(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y)$. z ve \bar{z} in $w(z, \bar{z})$ ye göre türevi aşağıdaki verilmektedir (Belgacem, F.B.M., Karaballi, A.A., 2006):

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (6.2)$$

burada

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6.4)$$

Benzer şekilde $w(z, \bar{z})$ 'nın z ve \bar{z} 'e göre ikinci dereceden türevleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2i \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2i \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Örnek 6.1.

$$2 \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial z} = 2z + 7 \quad (6.5)$$

$$w(x, 0) = x^2 + 5x \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x, 0) = i(2x + 1) \quad (6.7)$$

verilen kısmi diferensiyel denkleminin yaklaşık analitik çözümünü DTM yöntemi ile çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$2 \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{i}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 7$$

$$\frac{3}{2} i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 2iy$$

$$\left[3 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 4x + 14 \right. \quad (6.8)$$

$$\left. 3i \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} = 4iy \right] \quad (6.9)$$

(6.8) ve (6.9) dönüşümünden elde ettiğimiz

$$3(k+1)U(k+1, h) - (h+1)V(k, h+1) = 4\delta(k-1, h) + 14\delta(k, h) \quad (6.10)$$

$$3(k+1)V(k+1, h) + (h+1)U(k, h+1) = 4\delta(k, h-1) \quad (6.11)$$

ve

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{h=0}^n w(k, h) x^k y^h \quad (6.12)$$

(6.12) ve (6.6) arasında aşağıdaki eşitlikler elde edilir,

$$\begin{aligned} U(0,0) = 0, \quad U(1,0) = 5, \quad U(i,0) = 0 \quad (i = 3,4,5, \dots) \\ V(i,0) = 0 \quad (i = 0,1,2, \dots) \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{k=0}^m \sum_{h=1}^n h[U(k, h) + iV(k, h)] x^k y^{h-1} \quad (6.14)$$

(6.14) ve (6.6) dan elde edilen

$$\begin{aligned} V(0,1) = 0, \quad V(1,1) = 2, \quad V(i,1) = 0 \quad (i = 2,3,4, \dots) \\ U(i,1) = 0 \quad (i = 0,1,2, \dots) \end{aligned} \quad (6.15)$$

(6.13) ve (6.15) denklemlerinin (6.10) ve (6.11) denklemlerinde yerine yazılırsa

$k = 0, h = 1$ için

$$3U(1,1) - 2V(0,2) = 4\delta(-1,1) + 14\delta(0,1)$$

$$3 \cdot 0 - 2V(0,2) = 4 \cdot 0 + 14 \cdot 0$$

$$V(0,2) = 0$$

$$3V(1,1) + 2U(0,2) = 4\delta(0,0)$$

$$3 \cdot 2 + 2U(0,2) = 4 \cdot 1$$

$$6 + 2U(0,2) = 4$$

$$2U(0,2) = -2$$

$$U(0,2) = -1 \quad (6.16)$$

$k = 1, h = 1$ için

$$3U(2,1) - 2V(1,2) = 4\delta(0,1) + 14\delta(1,1)$$

$$3.0 - 2V(1,2) = 4.0 + 14.0$$

$$V(1,2) = 0$$

$$6V(2,1) + 2U(1,2) = 4\delta(1,0)$$

$$6.0 + 2U(1,2) = 4.0$$

$$U(1,2) = 0 \quad (6.17)$$

$$W(x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{h=0}^n w(k, h) x^k y^h = \sum_{k=0}^m \sum_{h=0}^n [U(k, h) + iV(k, h)] x^k y^h \quad (6.18)$$

$h = 0$ için

$$[U(0,0) + iV(0,0)] + [U(1,0) + iV(1,0)]x + \dots$$

$h = 1$ için

$$[U(0,1) + iV(0,1)]y + [U(1,1) + iV(1,1)]xy + \dots$$

$h = 2$ için

$$[U(0,2) + iV(0,2)]y^2 + [U(1,2) + iV(1,2)]xy^2 + \dots$$

$h = 3$ için

$$[U(0,3) + iV(0,3)]y^3 + [U(1,3) + iV(1,3)]xy^3 + \dots$$

verilen değerler yerine yazılırsa

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x \quad (6.19)$$

$$v(x, y) = 2xy + y \quad (6.20)$$

(6.19) ve (6.20) denklemlerinden elde edilir ki;

$$W(x, y) = 5x + x^2 + iy + 2ixy - y^2$$

$$W(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + i(2xy + y)$$

$$= x^2 + 2ixy - y^2 + 3(x + iy) + 2(x - iy)$$

$$= z^2 + 3z + 2\bar{z}.$$

Örnek 6.2.

$$3 \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - 2 \frac{\partial w}{\partial z} = -4z + 26 \quad (6.21)$$

$$w(x, 0) = x^2 + 2x \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x, 0) = i(2x - 10) \quad (6.23)$$

verilen kısmi diferensiyel denkleminin yaklaşık analitik çözümünü DTM yöntemi ile çözüünüz.

Çözüm: (6.21) denkleminde

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$3 \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - 2 \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{3}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{3}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{3}{2} i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{3}{2} i \frac{\partial v}{\partial x} - \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (6.24)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{5}{2} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{5}{2} i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} i \frac{\partial v}{\partial x} = -4x - 4iy + 26 \quad (6.25)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{5}{2} \frac{\partial v}{\partial y} = -4x + 26 \\ \frac{5}{2} i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{5}{2} i \frac{\partial u}{\partial y} = -4iy \end{cases} \quad (6.26)$$

Her iki denklem de iki ile çarpılırsa

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - 5 \frac{\partial v}{\partial y} = -8x + 52 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + 5 \frac{\partial u}{\partial y} = -8y \end{cases} \quad (6.27)$$

elde edilir.

$$(k+1)U(k+1, h) - 5(h+1)V(k, h+1) = -8\delta(k-1, h) + 52\delta(k, h) \quad (6.28)$$

$$(k+1)V(k+1, h) + 5(h+1)U(k, h+1) = -8\delta(k, h-1) \quad (6.29)$$

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{h=0}^n w(x, y) x^k y^h = \sum_{k=0}^m \sum_{h=0}^n [U(k, h) + iV(k, h)] x^k y^h \quad (6.30)$$

$$U(0,0) = 0, U(1,0) = 2, U(2,0) = 1, \dots, U(i,0) = 0 \quad (i = 3,4,5, \dots) \quad (6.31)$$

$$V(0,0) = 0, V(1,0) = 0, V(2,0) = 0, \dots, V(i,0) = 0 \quad (i = 0,1,2, \dots) \quad (6.32)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{k=0}^m \sum_{h=1}^n h[U(k,h) + iV(k,h)]x^k y^{h-1} = i(2x - 10) \quad (6.33)$$

$$U(1,0) = 0, U(1,1) = 0, U(2,1) = 0, \dots, U(i,1) = 0 \quad (i = 0,1,2, \dots) \quad (6.34)$$

$$V(0,1) = -10, V(1,1) = 2, V(2,1) = 0, \dots, V(i,1) = 0 \quad (i = 2,3,4, \dots) \quad (6.35)$$

verilen değerler (6.28) ve (6.29) denklemlerinde yerine yazıldığında

$k = 0, h = 1$ için

$$\begin{aligned} U(1,1) - 10V(0,2) &= -8\delta(-1,1) + 52\delta(0,1) \\ 0 - 10V(0,2) &= 0 \\ V(0,2) &= 0 \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned} V(1,1) + 10U(0,2) &= -8\delta(0,0) \\ 2 + 10U(0,2) &= -8.1 \\ 10U(0,2) &= -10 \\ U(0,2) &= -1 \end{aligned} \quad (6.37)$$

$k = 1, h = 1$ için

$$\begin{aligned} 2U(2,1) - 10V(1,2) &= -8\delta(0,1) + 52\delta(1,1) \\ V(1,2) &= 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} 2V(2,1) + 10U(1,2) &= -8\delta(1,0) \\ U(1,2) &= 0 \end{aligned} \quad (6.39)$$

$k = 0, h = 2$ için

$$\begin{aligned} U(1,2) - 15V(0,3) &= -8\delta(-1,2) + 52\delta(0,2) \\ V(0,3) &= 0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} V(1,2) + 15U(0,3) &= -8\delta(1,0) \\ U(0,3) &= 0 \end{aligned} \quad (6.41)$$

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^m \sum_{h=0}^n w(k,h)x^k y^h = \sum_{k=0}^m \sum_{h=0}^n [U(k,h) + iV(k,h)]x^k y^h$$

verilen değerler yerine yazıldığında

$$w(x, y) = 2x + x^2 - 10iy + 2ixy - y^2 \quad (6.42)$$

$$= x^2 + 2x - y^2 - i(10y - 2xy) \quad (6.43)$$

sonucu elde edilir.

Örnek 6.3.

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} = 4z + 2A + B \quad (6.44)$$

ve sınır koşulları

$$w(x, 0) = z^2 + Az + B\bar{z} \quad (6.45)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i(2x + A - B), A, B \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (6.46)$$

burada A ve B normal dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere, rastgele kompleks kısmi diferensiyel denkleminin yaklaşık analitik çözümünü DTM yöntemi ile çözünüz ve olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6.47)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6.48)$$

(6.47) ve (6.48) de verilen eşitlikler (6.44) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \\ &\Rightarrow \frac{3}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{3}{2} i \frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 4iy + 2A + B \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 8x + 4A + 2B \\ 3 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 8y \end{cases} \quad (6.50)$$

(6.50) deki denklem sistemine DTM yöntemi uygulanırsa,

$$3(h+1)U(k, h+1) + (k+1)V(k+1, h) = 8\delta(k-1, h) + 4A + 2B \quad (6.51)$$

$$3(h+1)V(k, h+1) - (k+1)U(k+1, h) = 8\delta(k, h-1) \quad (6.52)$$

elde edilir. Bu sistemin çözümünden elde edilen $U(k, h)$ ve $V(k, h)$ değerleri aşağıdaki ifadede yerlerine yazılarak

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{h=0}^n w(k, h) x^k y^h = \sum_{k=0}^m \sum_{h=0}^n [U(k, h) + iV(k, h)] x^k y^h \quad (6.53)$$

seri çözüm bulunabilir. Bunun için (6.45) ve (6.46) daki sınır koşulları kullanılırsa

$$U(0,0) = 0, U(1,0) = A + B, U(2,0) = 1, \dots, U(i, 0) = 0 \quad (i = 3, 4, 5, \dots) \quad (6.54)$$

$$V(i, 0) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.55)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{k=0}^m \sum_{h=1}^n h [U(k, h) + iV(k, h)] x^k y^{h-1} \quad (6.56)$$

(6.46) ve (6.56)' dan

$$V(0,1) = A - B, V(1,1) = 2, \dots, V(i, 1) = 0 \quad (i = 2, 3, 4, \dots) \quad (6.57)$$

$$U(i, 1) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.58)$$

elde edilir. (6.55) ve (6.58) eşitlikleri (6.51)-(6.52) denklemlerinde yerlerine yazılırsa ve iterasyon yöntemi kullanılırsa

$$U(0,2) = -1 \quad (6.59)$$

ve diğer tüm terimler sıfır bulunur. (6.55), (6.58) ve (6.59) daki eşitlikler (6.53) te yerine yazılırsa

$$u(x, y) = (A + B)x + x^2 - y^2, \quad (6.60)$$

$$v(x, y) = (A - B)y + 2xy. \quad (6.61)$$

(6.60) ve (6.61) eşitliklerinden ,

$$\begin{aligned} w(x, y) &= (A + B)x + x^2 - y^2 + i((A - B)y + 2xy) \\ &= x^2 + 2xyi - y^2 + A(x + iy) + B(x - iy) \\ &= z^2 + Az + B\bar{z} \end{aligned} \quad (6.62)$$

elde edilir.

$A, B \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişken olsun. Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

dir. $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri ve varyansı

$$E[x] = \mu, \quad E[x^2] = \mu^2 + \sigma^2 \quad \text{ve} \quad Var[x] = \sigma^2$$

Bu momentler kullanılarak ve x ve y rastgele bağımsız değişken ise $E[x.y] = E[x]E[y]$ olduğundan, beklenen değer ve varyansın yaklaşık formülleri

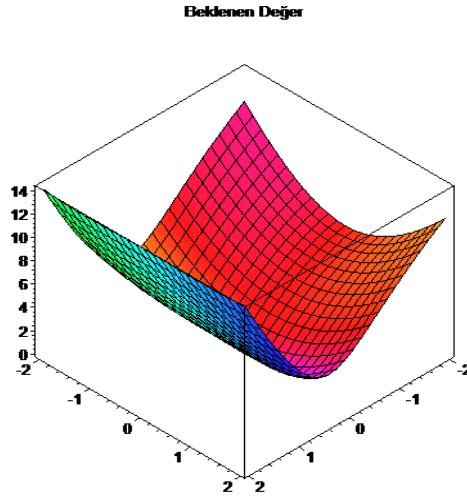
$$E[w(x,y)] = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n E(w(k,h))x^k y^h$$

$$\begin{aligned} A, B \sim N(\mu, \sigma^2) \quad E[w(x,y)] &= E[z^2 + Az + B\bar{z}] \\ &= z^2 + zE(A) + \bar{z}E(B) \\ &= z^2 + z\mu + \bar{z}\mu \\ &= z^2 + \mu(z + \bar{z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[w(x,y)] &= Var[z^2 + Az + B\bar{z}] \\ &= z^2 Var[A] + \bar{z}^2 Var[B] \\ &= z^2 \sigma^2 + \bar{z}^2 \sigma^2 \\ &= (z^2 + \bar{z}^2) \sigma^2 \end{aligned}$$

Özel olarak, $A, B \sim N(3,2)$ için,

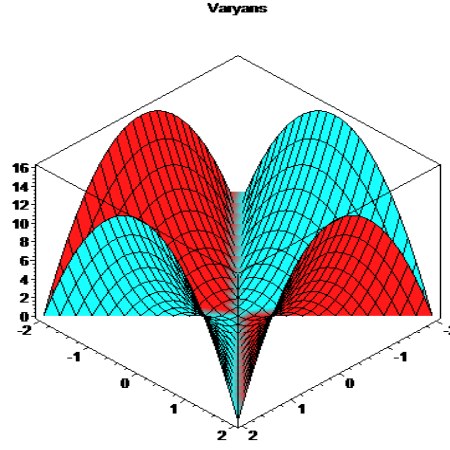
$$E[w(x,y)] = z^2 + 3(z + \bar{z})$$



Şekil 6.1. $\mu = 3, \sigma^2 = 2$ değerleri için (6.44) denkleminin beklenen değeri

ve

$$Var[W(x,y)] = 2(z^2 + \bar{z}^2)$$



Şekil 6.2. $\mu = 3, \sigma^2 = 2$ değerleri için (6.44) denkleminin varyansı

bulunur.

Örnek 6.4.

$$4 \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - 2 \frac{\partial w}{\partial z} = -4z + 4B - 2A \quad (6.63)$$

ve sınır koşulları

$$w(x, 0) = x^2 + (A + B)x \quad (6.64)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x, 0) = (2x + A - B)i, \quad A, B \sim G(\alpha, \beta) \quad (6.65)$$

burada A ve B gamma dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere, rastgele kompleks kısmi diferensiyel denkleminin yaklaşık analitik çözümünü DTM yöntemi ile çözünüz ve. olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6.66)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6.67)$$

(6.66) ve (6.67) de verilen eşitlikler (6.65) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$4 \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - 2 \frac{\partial w}{\partial z} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} + 2i \frac{\partial u}{\partial y} + 2i \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - 3 \frac{\partial v}{\partial y} + 3i \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -4(x + iy) + 4B - 2A \quad (6.68)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - 3 \frac{\partial v}{\partial y} = -4x + 4B - 2A \\ 3 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -4y \end{cases} \quad (6.69)$$

(6.69) daki denklem sistemine DTM yöntemi uygulanırsa,

$$(k + 1)U(k + 1, h) - 3(h + 1)V(k, h + 1) = -4\delta(k - 1, h) + (4B - 2A)\delta(k, h) \quad (6.70)$$

$$3(k + 1)V(k + 1, h) + (h + 1)U(k, h + 1) = -4\delta(k, h - 1) \quad (6.71)$$

elde edilir. Bu sistemin çözümünden elde edilen $U(k, h)$ ve $V(k, h)$ değerleri aşağıdaki ifadede yerlerine yazılarak

$$w(x, 0) = \sum_{k=0}^m \sum_{h=0}^n W(k, h) x^k y^h = \sum_{k=0}^m \sum_{h=0}^n [U(k, h) + iV(k, h)] x^k y^h \quad (6.72)$$

seri çözüm bulunabilir. Bunun için (6.64) ve (6.65) daki sınır koşulları kullanılırsa

$$U(0, 0) = 0, U(1, 0) = A + B, U(1, 0) = 1, \dots, U(i, 0) = 0 \quad (i = 2, 3, \dots) \quad (6.73)$$

$$V(i, 0) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.74)$$

$$\sum_{k=0}^m \sum_{h=1}^n h[U(k, h) + iV(k, h)] x^k y^{h-1} \quad (6.75)$$

(6.64) ve (6.65) den

$$U(i, 1) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (6.76)$$

$$V(0, 1) = A - B, V(1, 1) = 2, \dots, V(i, 1) = 0 \quad (i = 2, 3, 4, \dots) \quad (6.77)$$

elde edilir. (6.74) ve (6.76) eşitlikleri (6.71)-(6.72) denklemlerinde yerlerine yazılırsa ve iterasyon yöntemi kullanılırsa

$$U(0, 2) = -1 \quad (6.78)$$

ve diğer tüm terimler sıfır bulunur. (6.74), (6.76) ve (6.78) deki eşitlikler (6.72) de yerine yazılırsa

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + (A + B)x \quad (6.79)$$

$$v(x, y) = 2xy + (A - B)y \quad (6.80)$$

(6.79) ve (6.80) den

$$\begin{aligned} w(x, y) &= x^2 - y^2 + (A + B)x + 2xyi + i(A - B)y \\ &= z^2 + Az + B\bar{z} \end{aligned} \quad (6.81)$$

elde edilir. $A, B \sim G(\alpha, \beta)$ Gamma dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişken ve $\alpha = 4$ ve $\beta = 2$ olsun. Gamma dağılımın moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}$$

dir. $x \sim G(\alpha, \beta)$ bağımsız rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri ve varyansı,

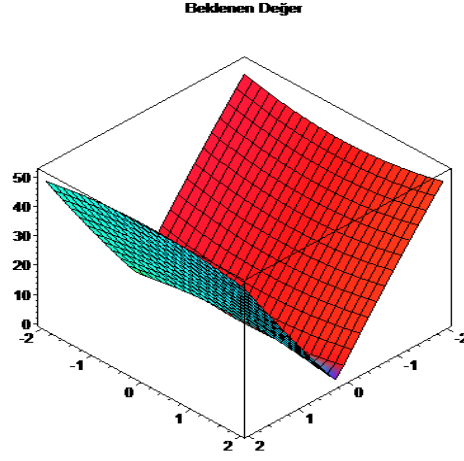
$$E[x] = \alpha\beta, E[x^2] = (\alpha + \alpha^2)\beta^2 \text{ ve } Var[x] = \alpha\beta^2.$$

Bu momentler kullanılarak ve x ve y rasgele bağımsız değişken ise $E[x.y] = E[x]E[y]$ olduğundan, beklenen değer ve varyansın yaklaşık formülleri

$$\begin{aligned} E[w(x, y)] &= \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n E(w(k, h))x^k y^h \\ E[W(x, y)] &= E[z^2 + Az + B\bar{z}] \\ &= z^2 + zE[A] + \bar{z}E[B] \\ &= z^2 + z\alpha\beta + \bar{z}\alpha\beta \\ &= z^2 + \alpha\beta(z + \bar{z}) \\ Var[w(x, y)] &= Var[z^2 + Az + B\bar{z}] \\ &= z^2 Var(A) + \bar{z}^2 Var(B) \\ &= z^2 \alpha\beta^2 + \bar{z}^2 \alpha\beta^2 \\ &= (z^2 + \bar{z}^2) \alpha\beta^2 \end{aligned}$$

Özel olarak, $\alpha = 4, \beta = 3$ seçilirse, $A, B \sim G(\alpha = 4, \beta = 3)$ için

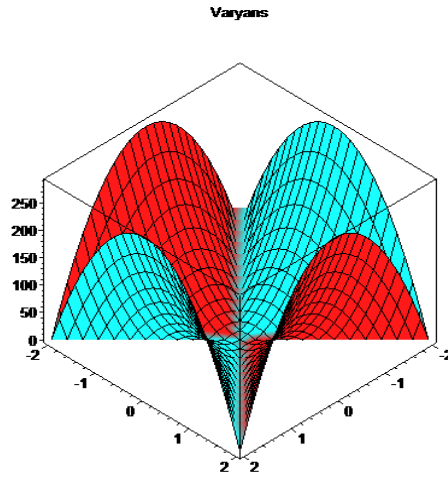
$$E[w(x, y)] = z^2 + 12(z + \bar{z})$$



Şekil 6.3. $\alpha = 4$, $\beta = 3$ değerleri için (6.63) denkleminin beklenen değeri

ve

$$Var[W(x, y)] = 36(z^2 + \bar{z}^2)$$



Şekil 6.4. $\alpha = 4$, $\beta = 3$ değerleri için (6.63) denkleminin varyansı

bulunur.

Örnek 6.5.

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial z} = 3z^2 + A + B \quad (6.82)$$

ve sınır şartları

$$w(x, 0) = (A + B)x + x^3 \quad (6.83)$$

$$\frac{\partial w(x, 0)}{\partial y} = i(3x^2 + A - B) \quad (6.84)$$

burada A ve B düzgün dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere, rastgele kompleks kısmi diferensiyel denkleminin yaklaşık analitik çözümünü DTM yöntemi ile çözünüz ve. olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6.85)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6.86)$$

(6.85) ve (6.86) eşitlikleri (6.82) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} &= 3(x + iy)^2 + A + B \end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = 3(x^2 - y^2) + A + B \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 6xy \end{array} \right. \quad (6.87)$$

(6.87) deki denklem sistemine DTM yöntemi uygulanırsa,

$$(k + 1)U(k + 1, h) = 3\delta(k - 2, h) - 3\delta(k, h - 2) + (A + B)\delta(k, h)$$

$$(k + 1)V(k + 1, h) = 6\delta(k - 1, h - 1)$$

elde edilir.

$$U(0, 0) = 0, U(1, 0) = A + B, U(2, 0) = 0, U(3, 0) = 1, \dots, U(i, 0) = 0 \quad (i = 3, 4, \dots)$$

$$V(i, 0) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

$$V(0,1) = A - B, V(1,1) = 0, V(2,1) = 3, \dots, V(i,1) = 0 \quad (i = 3,4, \dots)$$

$$U(i,0) = 0 \quad (i = 0,1,2, \dots)$$

$$w(x,y) = x^3 - 3xy^2 + (A+B)x + 3x^2yi - y^3i + (A-B)yi$$

A Düzgün dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişken ortalama kare hesap ve DTM kullanılırsa, beklenen değer ve varyansı

$$E[w(x,y)] = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n E[w(k,h)]x^k y^h$$

$$Var(w(x,y)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n Cov(w(i,j), w(i,j))x^{i+j}y^{i+j}$$

ve Düzgün dağılımın moment çıkaran fonksiyonu

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t}$$

$x \sim U(\alpha, \beta)$ $E[x] = \frac{\alpha + \beta}{2}$, $Var[x] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$ bu momentleri kullanırken, x ve y bağımsız rastgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$, bu yaklaşık formüller kullanılarak, beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$E[w(x,y)] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} E(w(k,h))x^k y^h$$

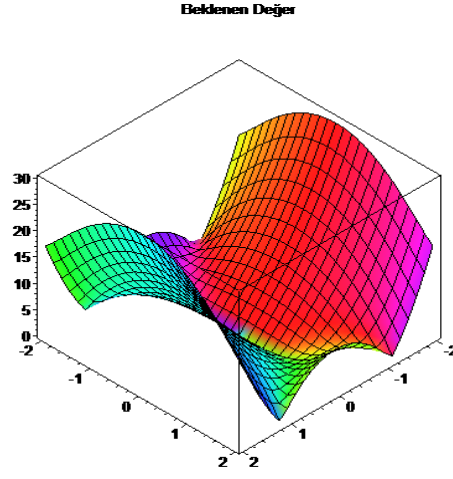
$$A, B \sim U(\alpha, \beta)$$

$$\begin{aligned} E[w(x,y)] &= E[z^3 + Az + B\bar{z}] \\ &= z^3 + zE[A] + \bar{z}E[B] \\ &= z^3 + \frac{z(\alpha + \beta)}{2} + \frac{\bar{z}(\alpha + \beta)}{2} \\ &= z^3 + \frac{(\alpha + \beta)}{2}(z + \bar{z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[w(x,y)] &= Var[z^3 + Az + B\bar{z}] \\ &= z^2 Var(A) + \bar{z}^2 Var(B) \\ &= \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}(z^2 + \bar{z}^2) \end{aligned}$$

Özel olarak, $A, B \sim U(5,6)$ için

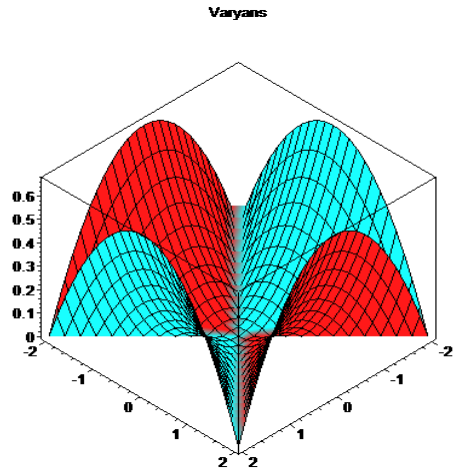
$$E[w(x, y)] = z^3 + \frac{11}{2}(z + \bar{z})$$



Şekil 6.5. $\alpha = 5$, $\beta = 6$ değerleri için (6.82) denkleminin beklenen değeri

ve

$$Var[W(x, y)] = \frac{1}{12}(z^2 + \bar{z}^2)$$



Şekil 6.6. $\alpha = 5$, $\beta = 6$ değerleri için (6.82) denkleminin varyansı

bulunur.

Örnek 6.6.

$$z \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \bar{z} \frac{\partial w}{\partial z} = 2z\bar{z} + Az \quad (6.88)$$

ve sınır şartları

$$w(x, 0) = x^2 + Ax \quad (6.89)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x, 0) = (2x - A)i,$$

burada $A \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ beta dağılıma sahip birbirinden bağımsız rastgele değişken olmak üzere, rastgele kompleks kısmi diferensiyel denkleminin yaklaşık analitik çözümünü DTM yöntemi ile çözünüz ve olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6.90)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6.91)$$

(6.90) ve (6.91) eşitlikleri (6.88) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} z \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + \bar{z} \frac{\partial w}{\partial z} &= (x + iy) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ &\quad + (x - iy) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = 2x^2 + 2y^2 + Ax + Aiy \end{aligned}$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + ix \frac{\partial v}{\partial x} - iy \frac{\partial v}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 + 2y^2 + Ax + Aiy$$

elde edilir.

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 + 2y^2 + Ax \\ x \frac{\partial v}{\partial x} - y \frac{\partial v}{\partial y} = Ay \end{cases} \quad (6.92)$$

(6.92) deki denklem sistemine DTM yöntemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \delta(r-1, h-s)(k-r+1)U(k-r+1, s) \\
& - \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \delta(r, h-s-1)(s+1)U(k-r, s+1) \\
& = 2\delta(k-2, h) - 2\delta(k, h-2) + A\delta(k-1, h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \delta(r-1, h-s)(k-r+1)V(k-r+1, s) \\
& - \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \delta(r, h-s-1)(s+1)V(k-r, s+1) = A\delta(k, h-1) \\
& U(0,0) = 0, U(1,0) = A, U(2,0) = 1, \dots, U(i,0) = 0 \quad (i = 3,4, \dots) \\
& V(i,0) = 0 \quad (i = 0,1,2, \dots) \\
& V(0,1) = -A, V(1,1) = 2, \dots, V(i,1) = 0 \quad (i = 2,3, \dots) \\
& U(i,1) = 0 \quad (i = 0,1,2, \dots)
\end{aligned}$$

$k = 0, h = 2$ alınırsa $r = 0, s = 0,1,2$ için

$$\begin{aligned}
& \delta(-1,2)U(1,0) - \delta(0,1)U(0,1) + \delta(-1,1)U(1,1) - 2\delta(0,0)U(0,2) + \delta(-1,0)U(1,2) \\
& - 3\delta(0,-1)U(0,3) = 2\delta(-2,2) + 2\delta(0,0) + A\delta(-1,2) \\
& U(0,2) = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W(x, y) &= \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n w(k, h)x^k y^h \\
&= x^2 - y^2 + Ax + i(2xy - Ay) \\
&= x^2 + 2xyi - y^2 + Ax + iAy \\
&= z^2 + Az
\end{aligned}$$

x Beta dağılıma sahip rasgele değişkendir. $x \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ özel olarak $\alpha = 1, \beta = 2$ seçilirse $x \sim \text{Beta}(\alpha = 1, \beta = 2)$ ortalama kare hesap ve DTM kullanılırsa, beklenen değer ve varyans

$$E[W(x, y)] = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^n E(w(k, h))x^k y^h$$

ve beta dağılımın moment çıkaran fonksiyonu

$$\begin{aligned}
M_x(\alpha, \beta, t) &= E[e^{tx}] \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha + r}{\alpha + \beta + r} \right) \frac{t^k}{k!}
\end{aligned}$$

$$x \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \text{ ise } E[x] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \text{Var}(x) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Bu momentler kullanılırken , x ve y bağımsız rasgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$, bu yaklaşık formüller kullanılarak, beklenen değer ve varyans, aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

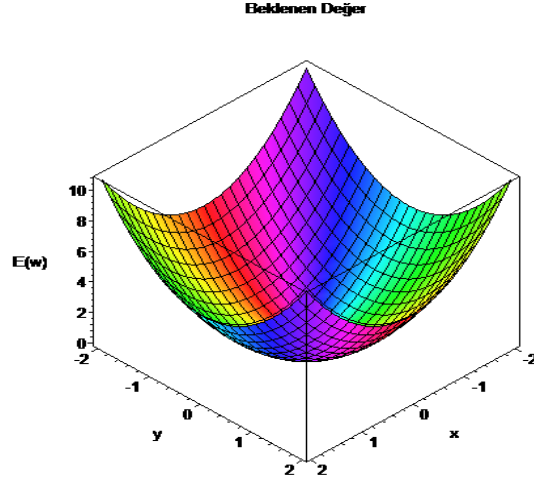
$$\begin{aligned}
E[W(x, y)] &= E(z^2 + Az) \\
&= z^2 + z^2 E(A) \\
&= z^2 + \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.
\end{aligned}$$

$A \sim \text{Beta}(\alpha = 1, \beta = 2)$ özel değerleri için

$$E[w(x, y)] = z^2 + \frac{z^2}{3} = \frac{4}{3}z^2$$

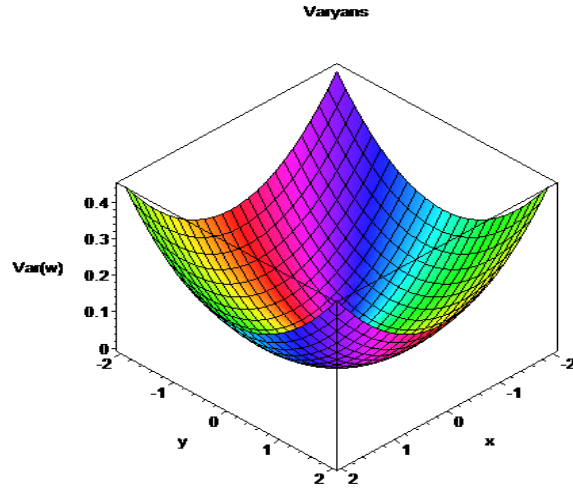
$$\begin{aligned}
\text{Var}[W(x, y)] &= \text{Var}(z^2 + Az) \\
&= z^2 \text{Var}(A) \\
&= z^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}
\end{aligned}$$

$A \sim \text{Beta}(\alpha = 1, \beta = 2)$ özel değerleri ise $\text{Var}[w(x, y)] = \frac{z^2}{18}$ elde edilir. Bu değerlerin grafiksel gösterimi aşağıda verilmiştir.



Şekil 6.7. $\alpha = 1$, $\beta = 2$ değerleri için (6.88) denkleminin beklenen değeri

ve



Şekil 6.8. $\alpha = 1$, $\beta = 2$ değerleri için (6.88) denkleminin varyansı

bulunur.

7. Kompleks Türevler

$w = w(z, \bar{z})$ ($w = w(z, \bar{z})$ bir kompleks fonksiyon)

$z = x + iy$, $w(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y)$

$w(z, \bar{z})$ ' in z ve \bar{z} değişkenlerine göre 1. mertebeden türevleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (7.2)$$

7.2. Elzaki Dönüşümü

Elzaki dönüşümü Laplace ve Sumudu dönüşümü revize edilerek elde edilir. Bu dönüşüm aşağıdaki formda T. Elzaki tarafından tanımlanan bir integral denklemdir.

$$E[f(t)] = s^2 \int_0^{\infty} f(st) e^{-t} dt = T(s), \quad s \in (k_1, k_2), \quad k_1, k_2 > 0 \quad (7.3)$$

Değişken değişimi yapılarak (7.3) eşitliği aşağıdaki forma dönüştürülür.

$$E[f(t)] = s \int_0^{\infty} f(t) e^{-\frac{t}{s}} dt = T(s). \quad (7.4)$$

7.3. Elzaki Dönüşümünün Özellikleri

Elzaki dönüşümünün tanımını kullanarak, türev fonksiyonlarının Elzaki dönüşümü aşağıdaki gibi elde edilebilir.

1. $E[f'(t)] = \frac{T(s)}{s} - sf(0),$
2. $E[f''(t)] = \frac{T(s)}{s^2} - f(0) - sf'(0),$
3. $E[f^{(n)}(t)] = \frac{T(s)}{s^n} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{2-n+k} f^{(k)}(0).$

Elzaki dönüşümünde alternatif katlar arasındaki ilişki aşağıdaki gibi elde edilebilir.

1. $E[tf(t)] = s^2 \frac{d}{ds} T(s) - sT(s),$
2. $E[t^2 f(t)] = s^4 \frac{d^2}{ds^2} T(s),$

$$3. E[t^3 f(t)] = s^6 \frac{d^3}{ds^3} T(s) + 3s^5 \frac{d^2}{ds^2} T(s),$$

Kısmi diferensiyel denklemlerin Elzaki Dönüşümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right] &= \int_0^\infty s \frac{\partial f}{\partial t} e^{-\frac{t}{s}} dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p s e^{-\frac{t}{s}} \frac{\partial f}{\partial t} dt \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \left[s e^{-\frac{t}{s}} f(x, t) \right]_0^p - \int_0^p e^{-\frac{t}{s}} f(x, t) dt \right\} = \frac{T(x, s)}{s} - s f(x, 0) \end{aligned}$$

Kabul edelim ki f parçalı sürekli ve üstel mertebeden olsun,

$$\begin{aligned} E\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right] &= \int_0^\infty s \frac{\partial f}{\partial x} e^{-\frac{t}{s}} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty s e^{-\frac{t}{s}} f(x, t) dt \text{ (Leibniz kuralı kullanılarak)} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} [T(x, s)] \end{aligned}$$

elde edilir.

7.4. Birinci Mertebeden Sabit Katsayılı Kompleks Diferensiyel Denklemlerin Elzaki Dönüşüm Yöntem Çözümü

Teorem 7.3.1. A, B, C reel sabitler, $F(z, \bar{z})$, z, \bar{z} 'in bir polinomu ve $w = u + iv$ kompleks bir fonksiyondur. O zaman çözümün reel ve sanal kısımları,

$$\begin{aligned} A \frac{\partial w}{\partial z} + B \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + Cw &= F(z, \bar{z}) \\ w(x, 0) &= f(x) \\ u = Rew &= E^{-1} \left[\frac{(A+B) \frac{\partial}{\partial x} (2T_3 + (A-B)sv(x, 0))}{[(A+B)D + 2C]^2 + \left(\frac{A-B}{s}\right)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2C(2T_3 + (A-B)sv(x, 0)) - \left(\frac{A-B}{s}\right)(2T_4 + (B-A)su(x, 0))}{[(A+B)D + 2C]^2 + \left(\frac{A-B}{s}\right)^2} \right], \end{aligned}$$

$$v = Imw = E^{-1} \left[\frac{(A+B) \frac{\partial}{\partial x} (2T_2 + (B-A)u(x,0)) + 2C}{[(A+B)D + 2C]^2 + \left(\frac{A-B}{s}\right)^2} + \frac{2C(2T_2 + (B-A)u(x,0)) - s(B-A)(2T_1 + (A-B)v(x,0))}{[(A+B)D + 2C]^2 + \left(\frac{A-B}{s}\right)^2} \right].$$

İspat:

$$A \frac{\partial w}{\partial z} + B \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + Cw = F(z, \bar{z}) \quad (7.5)$$

(7.5) eşitliğinde (7.1) ve (7.2) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$A \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right) + B \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right) + Cw = F_1(x, y) + iF_2(x, y) \quad (7.6)$$

Eğer (7.6) denkleminde $w = u + iv$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} - i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{B}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + C(u + iv) \\ = F_1(x, y) + iF_2(x, y) \end{aligned}$$

$$(A+B) \frac{\partial u}{\partial x} + (A-B) \frac{\partial v}{\partial y} + 2Cu = 2F_1(x, y) \quad (7.7)$$

$$(A+B) \frac{\partial v}{\partial x} + (B-A) \frac{\partial u}{\partial y} + 2Cv = 2F_2(x, y) \quad (7.8)$$

(7.7) ve (7.8) eşitliklerine Elzaki Dönüşümü uygulanırsa,

$$(i) \quad E \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right] = \frac{1}{s} T(x, s) - sf(x, 0)$$

$$(ii) \quad E \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \frac{\partial T(x, s)}{\partial x}$$

burada $T(x, s) = E[f(x, t)]$ dir.

$$(A + B) \frac{\partial T_1}{\partial x} + 2CT_1 + (A + B) \left[\frac{1}{s} T_2 - sv(x, 0) \right] = 2T_3 \quad (7.9)$$

$$(A + B) \frac{\partial T_2}{\partial x} + 2CT_2 + (B - A) \left[\frac{T_1}{s} - su(x, 0) \right] = 2T_4. \quad (7.10)$$

(7.9) ve (7.10) Elzaki Dönüşümlerine Cramer kuralı uygulanırsa,

$$(A + B) \frac{\partial T_1}{\partial x} + 2CT_1 + \frac{(A - B)}{s} T_2 = 2T_3 + (A - B)sv(x, 0)$$

$$\frac{(B - A)}{s} T_1 + 2CT_2 + (A + B) \frac{\partial T_2}{\partial x} = 2T_4 + (B - A)su(x, 0).$$

$$\begin{vmatrix} (A + B)D + 2C & \frac{A - B}{s} \\ \frac{B - A}{s} & (A + B)D + 2C \end{vmatrix} = [(A + B)D + 2C]^2 + \left(\frac{A - B}{s} \right)^2 = \Delta$$

$$T_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2T_3 + (A - B)sv(x, 0) & \frac{A - B}{s} \\ 2T_4 + (B - A)su(x, 0) & (A + B)D + 2C \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (7.11)$$

$$T_2 = \frac{\begin{vmatrix} (A + B)D + 2C & 2T_3 + (A - B)sv(x, 0) \\ \frac{B - A}{s} & 2T_4 + (B - A)su(x, 0) \end{vmatrix}}{\Delta} \quad (7.12)$$

(7.11) ve (7.12) denklemlerine Ters Elzaki Dönüşümü alarak,

$$u(x, y) = E^{-1}[T_1]$$

$$v(x, y) = E^{-1}[T_2]$$

elde edilir.

Örnek 7.1.

$$\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - 2w = 0, \quad w(x, 0) = Ae^{4z} \quad (7.12)$$

$A \sim U(\alpha, \beta)$ düzgün dağılımına sahip birbirinden bağımsız rastgele değişken olmak üzere, kompleks diferensiyel denkleminin yaklaşık analitik çözümünü Elzaki dönüşümü ile elde ederek, olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm: (7.12) de (7.1) ve (7.2) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right) - 2w = 0$$

elde edilir. Eğer verilen denklemde $w = u + iv$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} - i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - 2(u + iv) = 0 \\ & \begin{cases} 2 \frac{\partial v}{\partial y} - 4u = 0 \\ -2 \frac{\partial u}{\partial y} - 4v = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.13)$$

olur. (7.13) eşitliklerine Elzaki Dönüşümü uygulanırsa,

$$(i) \quad E \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right] = \frac{1}{s} T(x, s) - sf(x, 0)$$

$$(ii) \quad E \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \frac{\partial T(x, s)}{\partial x}$$

burada $T(x, s) = E[f(x, t)]$ dir.

$$2 \left[\frac{1}{s} T_2 - sv(x, 0) \right] - 4T_1 = 0$$

$$-2 \left[\frac{T_1}{s} - su(x, 0) \right] - 4T_2 = 0.$$

elde edilen Elzaki Dönüşümlerine Cramer kuralı uygulanırsa,

$$-4T_1 + \frac{2}{s} T_2 = 2sv(x, 0)$$

$$-\frac{2}{s} T_1 - 4T_2 = -2su(x, 0).$$

$$\begin{vmatrix} -4 & \frac{2}{s} \\ -\frac{2}{s} & -4 \end{vmatrix} = 16 + \frac{4}{s^2} = \Delta$$

$$T_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2sv(x, 0) & \frac{2}{s} \\ -2su(x, 0) & -4 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$T_2 = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 2sv(x, 0) \\ -\frac{2}{s} & -2su(x, 0) \end{vmatrix}}{\Delta}$$

denklemlerine Ters Elzaki Dönüşümü olarak,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= E^{-1}[T_1] \\ &= E^{-1}\left[\frac{4Ae^{4x}}{\Delta}\right] \\ &= Ae^{4x}\cos(2y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= E^{-1}[T_2] \\ &= E^{-1}\left[\frac{8Ae^{4x}s^2}{4s^2 + 1}\right] \\ &= Ae^{4x}\sin(2y) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

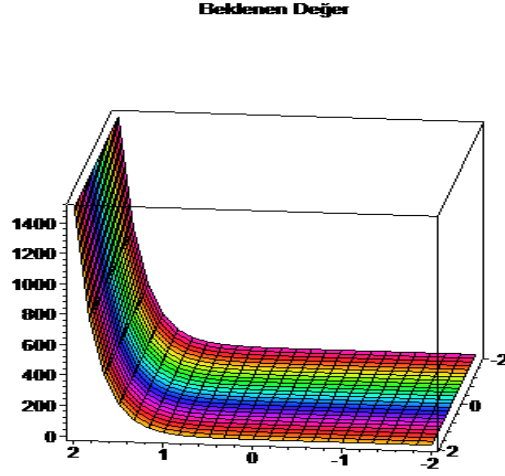
$$\begin{aligned} w &= Ae^{4x}[\cos(2y) + i\sin(2y)] \\ &= Ae^{3z+\bar{z}} \end{aligned}$$

$A \sim U(\alpha, \beta)$ $E[w] = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $Var[w] = \frac{(\alpha-\beta)^2}{12}$ bu momentleri kullanırken, x ve y bağımsız rastgele değişkenleri için $E[xy] = E[x]E[y]$, bu yaklaşık formüller kullanılarak, beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$E[w(x, y)] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} E(w(k, h))x^k y^h$$

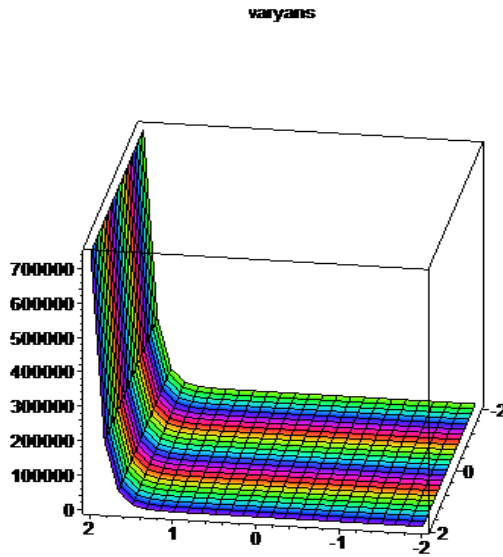
$A \sim U(\alpha, \beta)$ düzgün dağılımına sahip $\alpha = 0, \beta = 1$ seçilirse beklenen değer ve varyansı,

$$\begin{aligned} E[w(x, y)] &= e^{3z+\bar{z}}E[A] \\ &= e^{3z+\bar{z}}\frac{\alpha + \beta}{2} \\ &= \frac{e^{3z+\bar{z}}}{2}. \end{aligned}$$



Şekil 7.1. $\alpha = 0$, $\beta = 1$ değerleri için (7.12) denkleminin beklenen değeri

$$\begin{aligned}
 Var[w(x,y)] &= e^{6z+2\bar{z}} Var[A] \\
 &= e^{6z+2\bar{z}} \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}{12} \\
 &= \frac{e^{6z+2\bar{z}}}{12}.
 \end{aligned}$$



Şekil 7.2. $\alpha = 0$, $\beta = 1$ değerleri için (7.12) denkleminin varyansı

Örnek 7.2.

$$w_z - w_{\bar{z}} = A + B, \quad w(x, 0) = (A - B)x \quad (7.14)$$

$A \sim G(\alpha, \beta)$ ve $B \sim Beta(\alpha, \beta)$ dağılımlarına sahip birbirinden bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere, rastgele adi kompleks diferensiyel denkleminin yaklaşık analitik çözümünü Elzaki dönüşümü ile elde ederek, olasılık karakteristiklerini hesaplayınız.

Çözüm: (7.14) de (7.1) ve (7.2) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right) = A + B$$

elde edilir. Eğer verilen denklemde $w = u + iv$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} - i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] &= A + B \\ \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = A + B \\ -\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases} & \quad (7.15) \end{aligned}$$

olur. (7.15) eşitliklerine Elzaki Dönüşümü uygulanırsa,

$$(i) \quad E \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right] = \frac{1}{s} T(x, s) - sf(x, 0)$$

$$(ii) \quad E \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \frac{\partial T(x, s)}{\partial x}$$

burada $T(x, s) = E[f(x, t)]$ dir.

$$\frac{T_2}{s} - sv(x, 0) = (A + B)s^2$$

$$-\left(\frac{T_1}{s} - su(x, 0) \right) = 0.$$

elde edilen Elzaki Dönüşümlerine Cramer kuralı uygulanırsa,

$$\frac{T_2}{s} = sv(x, 0) + (A + B)s^2$$

$$\frac{T_1}{s} = su(x, 0).$$

$$T_1 = (A + B)s^3$$

$$T_2 = (A - B)xs^2$$

denklemlerine Ters Elzaki Dönüşümü alarak,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= E^{-1}[T_1] \\ &= E^{-1}[(A - B)xs^2] \\ &= (A - B)x \end{aligned}$$

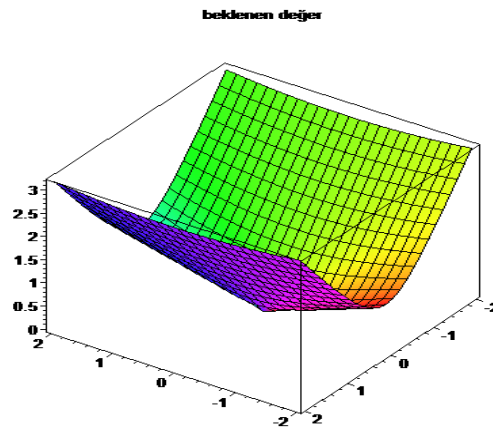
$$\begin{aligned} v(x, y) &= E^{-1}[T_2] \\ &= E^{-1}[(A + B)s^3] \\ &= (A + B)y \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned} w(x, y) &= (A - B)x + i(A + B)y \\ &= Az - B\bar{z}. \end{aligned}$$

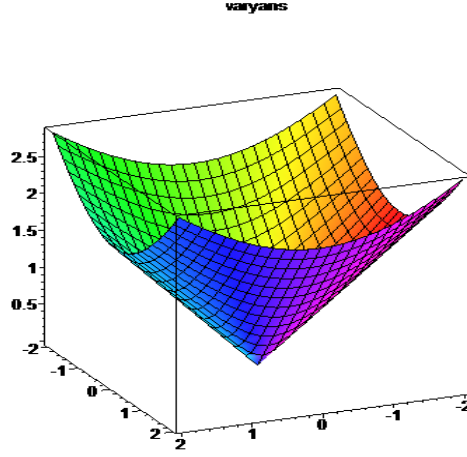
$A \sim G(\alpha, \beta)$ ve $B \sim Beta(\alpha, \beta)$ dağılımlarına sahip birbirinden bağımsız rastgele değişkenler ve $\alpha = 1$ ve $\beta = 1$ olsun. O halde beklenen değer ve varyansın yaklaşık değerleri,

$$\begin{aligned} E[w] &= E[A]z - E[B]\bar{z} \\ &= \alpha\beta z - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\bar{z} \\ &= z - \frac{\bar{z}}{2}. \end{aligned}$$



Şekil 7.3. $\alpha = 1$, $\beta = 1$ değerleri için (7.14) denkleminin beklenen değeri

$$\begin{aligned}
Var[w] &= Var[A]z - Var[B]\bar{z} \\
&= \alpha\beta^2z - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}\bar{z} \\
&= z - \frac{\bar{z}}{12}.
\end{aligned}$$



Şekil 7.4. $\alpha = 1$, $\beta = 1$ değerleri için (7.14) denkleminin varyansı

8. BULGULAR

Bu tez çalışması kapsamında, rastgele kompleks kısmi diferansiyel denklemler (KKDD) ve rastgele kompleks adi diferansiyel denklemlerin (KADD) çözümleri bir ve iki boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi(DDY), bir ve iki boyutlu Sumudu Dönüşüm Yöntemi(SDY), Elzaki Dönüşüm Yöntemi(EDY) gibi yaklaşık analitik çözüm yöntemleri yardımıyla elde edilmiştir. Bu denklemler katsayılar ve başlangıç koşulları farklı olasılık dağılımlarından seçilerek rastgele hale dönüştürölüp Sumudu, Frobenius ve Elzaki gibi metotlarla çözülmüştür. Buna ilaveten Cauchy-Euler ve Lane-Endem gibi özel türden kompleks adi diferansiyel denklemler rastgele hale dönüştürölerek çözüm davranışları incelenmiştir. Ayrıca, elde edilen çözümlerin olasılık karakteristikleri MAPLE (v.13) paket programı yardımıyla sayısal olarak elde edilmiştir. Sumudu dönüşüm metodu kullanılarak lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler, sabit katsayılı adi diferansiyel denklem ile dalga denkleminin analitik çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen analitik çözümlerin MAPLE(v.13) paket programı kullanılarak beklenen değer ve varyans grafikleri çizilmiştir. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırılmıştır. Bu yöntem kullanılarak lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler rastgele denklemlere dönüştürölümüştür ve elde edilen rastgele denklemler de Beta, Gama, Düzgün ve Normal dağılımları yardımı ile olasılık karakteristikleri incelenmiştir. Elde edilen çözümlerin beklenen değer ve varyans grafikleri MAPLE(v.13) paket programı yardımı ile çizilmiştir. Elzaki dönüşüm metodu kullanılarak lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler, sabit katsayılı adi ve kısmi diferansiyel denklemlerinin analitik çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen analitik çözümlerin MAPLE(v.13) paket programı kullanılarak beklenen değer ve varyans grafikleri çizilmiştir.

9. İRDELEME

Yapılan çalışmada literatürdeki adi ve kompleks diferensiyel denklemler başlangıç koşulları ve katsayıları farklı olasılık dağılımlarından seçilerek rastgele kompleks diferensiyel denklemler elde edilmiştir. Bu denklemler literatürde en sık kullanılan DDY, SDY ve EDY metotları yardımıyla yaklaşık analitik çözümler elde edilmiştir. Ayrıca, rastgele kompleks diferensiyel denklemlerin farklı olasılık dağılımları için beklenen değer ve varyans çözümleri bulunmuş ve çözüm grafikleri MAPLE(v.13) paket programı yardımı ile elde edilmiştir. Literatürde bu türden çalışmalar çok az yer almaktadır. Bu çalışmanın mevcut olan boşluğu dolduracağı ve bu alanda çalışmak isteyen araştırmacılara yol gösterici nitelik taşıdığını söyleyebiliriz.

10. SONUÇLAR

Bu çalışmada, rastgele kompleks kısmi diferensiyel denklemler (KKDD) ve rastgele kompleks adi diferensiyel denklemler (KADD) farklı metotlarla incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir:

1. Rastgele kompleks adi diferensiyel denklemlerin Sumudu, Frobenius, Lane-Endem, Elzaki metotları ile MAPLE (v.13) yazılım programında kodlar yazılarak olasılık karakteristikleri elde edilmiştir
2. Rastgele kompleks kısmi diferensiyel denklemlerin Sumudu, Frobenius, Lane-Endem, Elzaki metotları ile MAPLE (v.13) yazılım programında kodlar yazılarak olasılık karakteristikleri elde edilmiştir.
3. Rastgele kompleks adi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin birinci ve ikinci momentlerinin iyi sonuçlar verdiği MAPLE (v.13) yazılım programlarından elde edilen grafiklerden yorumlanmıştır.
4. Rastgele kompleks kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin birinci ve ikinci mertebeden momentlerinin iyi sonuçlar verdiği MAPLE (v.13) yazılım programlarından elde edilen grafiklerde yorumlanmıştır.

11. ÖNERİLER

Yapılan bu çalışma kapsamında rastgele adi ve kısmi kompleks diferensiyel denklemlerin çözümleri ile bu konuyla ilgili çalışma yapmayı düşünen araştırmacılar için bazı öneriler aşağıdaki gibi sıralanmıştır:

1. Rastgele birinci ve yüksek mertebeden kompleks adi diferensiyel denklemler için farklı olasılık dağılımlarından elde edilen çözümlerin davranışları incelenebilir. Olasılık karakteristikleri araştırılabilir.
2. Rastgele birinci ve ikinci mertebeden kompleks kısmi diferensiyel denklemler için farklı olasılık dağılımlarından elde edilen çözümlerin davranışları incelenebilir.

12. KAYNAKLAR

- Asiru, M.A., 2001. Sumudu Transform and The Solution of Integral Equations of Convolution Type, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 6, 906 - 910.
- Ayaz, F., 2003. On The Two-Dimensional Differential Transform Method, Appl. Math. Comput., 43, 361- 374.
- Bao, W. ve Tang, O., 2013. Numerical Study of Quantized Vortex Interaction in The Ginzburg-Landau Equation on Bounded Domains, Communications in Computational Physics, 14, 819–850.
- Belgacem, F.B.M. ve Karaballi,A.A., 2006. Sumudu Transfor Fundamental Properties Investigations and Applications Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 1- 23.
- Belgacem, F.B.M., 2006. Introducing and Analysing Deeper Sumudu Properties, Nonlinear Studies, 1, 23-41.
- Chen, C.L. ve Liu, Y.C., 1998. Differential Transformation Technique for Steady Nonlinear Heat Conduction Problems, Appl. Math. Comput., 95, 155-164.
- Chen, C.K. ve Ho, S.H., 1999. Solving Partial Differential Equations by Two Dimensional Differential Transform, Applied Mathematics and Computation, 106, 171-179.
- Chen, C.K. ve Chen, S.S., 2004. Application of The Differential Transformation Method to a Nonlinear Conservative System, Appl. Math. Comput., 154, 431-441.
- Chiou, J.S. ve Tzeng, J.R., 1996. Application of The Taylor Transform to Nonlinear Vibration Problems, ASME J. Vib. Acoust., 118, 83-87.
- Davis, H.T., 1962. Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations, Dover, New York.
- Elmabrouk, E. ve Abdelwahid F., 2016. Useful Formulas for One Dimensional Differential Transform, British Journal of Applied Science and Technology, 18, 1-8.
- Elzaki, T.M., 2011. The New Integral Transform Elzaki Transform, Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 1, 57-64.

- Elzaki, T.M. ve Elzaki, S.M., 2011. Application of New Transform “Elzaki Transform” to Partial Differential Equations, Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 1, 65-70.
- Elzaki, T.M. ve Elzaki, S.M., 2011. On the Connections Between Laplace and Elzaki Transforms, Advances in Theoretical and Applied Mathematics, 1, 1-11.
- Elzaki, T.M. ve Elzaki, S.M., 2011. On the Elzaki Transform and Ordinary Differential Equation With Variable Coefficients, Advances in Theoretical and Applied Mathematics, 1, 13-18.
- Elzaki, T.M., Kilicman, A. ve Eltayeb, H., 2010. On Existence and Uniqueness of Generalized Solutions for a Mixed-Type Differential Equation, Journal of Mathematics Research, 4, 88-92.
- Elzaki, T.M., 2009. Existence and Uniqueness of Solutions for Composite Type Equation, Journal of Science and Technology, 214-219.
- Elzaki, T.M. ve Elzaki, S.M., 2011. Applications of new transform ‘Elzaki Transform’ to Partial Differential Equations, Glob J Pure Appl Math., 7, 65–70.
- Elzaki, T.M. ve Elzaki, S.M., 2011. On the Elzaki Transform and Ordinary Differential Equation with Variable Coefficients, Adv Theor Appl Math., 6, 41–46.
- Forsythe, A.R., 1902. Theory of Differential Equations. Part III Ordinary Linear Equations.
- Jung, S.M. ve Roh, J., 2017. The Linear Differential Equations with Complex constant coefficients and schrödinger equations, Applied Mathematics Letters, 66, 23–29.
- Jurkat, W.B. ve Lutz, D.A., 1971. On The Order of Solutions of Linear Differential Equations Having Regular Singular Solutions, Proceedings of The London Mathematical Society, 32, 465–482.
- Keskin, Y. ve Oturanç, G., 2008. The Differential Transform Methods for Nonlinear Functions and Its Applications, Selçuk Journal of Applied Mathematics, 9, 69–76.
- Kılıçman, A., Eltayeb, H. ve Atan K.A.M., 2011. A Note on The Comparison Between Laplace and Sumudu Transforms, Bulletin of The Iranian Mathematical Society, 1, 131-141.
- Lane, J.H., 1870. On The Oretical Temperature of The Sun Under The Hypothesis of A Gaseous Mass Maintaining.
- Odibat, Z., 2008. Differential Transform Method for Solving Volterra Integral Equation with Separable Kernels, Math. Comput. Model., 48, 1144-1149.

- Sezer, M. ve Gülsu, M., 2006. Approximate Solution of Complex Differential Equations for A Rectangular Domain with Taylor Collocation Method, Applied Mathematics and Computation, 177, 844–851.
- Sezer, M., Gülsu, M. ve Tanay, B., 2006. A Taylor Collocation Method for The Numerical Solution of Complex Differential Equations with Mixed Conditions in Elliptic Domains, Applied Mathematics and Computation, 182, 498–508.
- Sibuya, Y., 2008. Linear Differential Equations in The Complex Domain: Problems of Analytic Continuation. American Mathematical Soc.
- Simmons, G.F., 1991. Differential Equations with Applications and Historical Notes, Second Edition. McGraw-Hill, London.
- Watugala, G.K., 1993. Sumudu Transform: A New Integral Transform to Solve Differential Equations and Control Engineering Problems. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1, 35-43.
- Watugala, G.K., 1998. Sumudu Transform—A New Integral Transform to Solve Differential Equations and Control Engineering Problems, Mathematical Engineering in Industry, 4, 319–329.
- Wazwaz, A.M., 2001. A New Algorithm for Solving Differential Equations of Lane–Emden Type, Applied Mathematics and Computation, 118, 287–310.
- Wazwaz, A.M., 2005. Adomian Decomposition Method for A Reliable Treatment of The Bratu-Type Equations, Appl. Math. Comput., 166 , 652-663.
- Weerakoon, S., 1998. Complex Inversion Formula for Sumudu Transform, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 4, 618–621.
- Yüzbaşı, S. ve Sezer, M., 2013. A Collocation Method to Find Solutions of Linear Complex Differential Equations In Circular Domains, Applied Mathematics and Computation, 219, 10610 – 10626.
- Zhou, J.K., 1986. Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits, Huazhong University Press, Wuhan, China.

ÖZGEÇMİŞ

Merve MERDAN, 1994 yılında Gümüşhane’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Gazipaşa İlkokulu’nda 2008 yılında tamamladı, lise öğrenimini ise 2012 yılında Gümüşhane Lisesi’nde tamamladı. 2012 yılında Gümüşhane Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Matematik Mühendisliği’nde başladığı lisans eğitimini 2017 yılında tamamladı.

2017 yılında Gümüşhane Üniversitesi Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı.